Модели принятия решений в условиях неопределенности

Теория игр

Основные вопросы

- 1. Основные понятия теории игр.
- 2. Нижняя и верхняя цена игры.
- 3. Игра с седловой точкой.
- 4. Решение игры в смешанных стратегиях.
- 5. Сведение решения игры к задаче линейного программирования.
- 6. Игры с природой.

Основные понятия теории игр

- Игрой называется математическая модель конфликтной ситуации. Стороны, участвующие в конфликте, называются участниками игры или игроками, а исход конфликта - выигрышем.
- Игра ведется по определенным правилам, которые представляют собой систему условий, регламентирующих возможные действия игроков.

- Ходом называется выбор одного из предложенных правилами игры действий и его осуществление.
- Стратегией игрока называется совокупность правил, определяющих выбор его действий при каждом личном ходе в зависимости от сложившейся ситуации.

- Для того, чтобы найти решение игры, следует для каждого игрока выбрать стратегию, которая удовлетворяет условию оптимальности, т.е. один из игроков должен получить максимальный выигрыш, когда второй придерживается своей стратегии. В то же время второй игрок должен иметь минимальный проигрыш, если первый придерживается своей стратегии. Такие стратегии называются оптимальными. Любому из игроков невыгодно отказаться от своей стратегии в игре.

Математическая модель задачи

- Пусть игрок **A** располагает m стратегиями, которые обозначим $A_1, A_2, \ldots, A_m$. Пусть у игрока **B** имеется n стратегий, обозначим их $B_1, B_2, \ldots, B_n$. В этом случае игра имеет размерность $m \times n$. В результате выбора игроками любой пары стратегий A_i и B_j ($i = 1,2, \ldots m$; $j = 1,2, \ldots, n$) однозначно определяется исход игры, т.е. выигрыш a_{ij} игрока **A** (положительный или отрицательный) и проигрыш ($-a_{ij}$) игрока **B**.

- Предположим, что значения a_{ij} известны для любой пары стратегий (A_i, B_j). Матрица $P = (a_{ij})$, $i = 1,2, \dots, m$; $j = 1,2, \dots, n$, элементами которой являются выигрыши, соответствующие стратегиям A_i, и B_j, называется платежной матрицей или матрицей игры:

$$P = \begin{bmatrix} a_{11} a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1} a_{m2} \dots a_{mn} \end{bmatrix}$$

Нижняя цена игры

- Обозначим через α_i наименьший выигрыш игрока **A** при выборе им стратегии A_i для всех возможных стратегий игрока **B** (наименьшее число в i-ой строке платежной матрицы). Среди всех чисел α_i $(i = 1,2, \ldots, m)$ выберем наибольшее: $\alpha = \max \{\alpha_i\}$.
- Число α называется нижней ценой игры. Это гарантированный выигрыш игрока **A** при любой стратегии игрока **B.**

Верхняя цена игры

- Игрок **B** заинтересован в том, чтобы уменьшить выигрыш игрока **A**, (а следовательно - свой проигрыш). Выбирая стратегию B_j, он учитывает максимально возможный при этом выигрыш игрока **A**. Обозначим β_j наибольший возможный выигрыш игрока при выборе игроком **B** его стратегии B_j (наибольшее число в j-ом столбце платежной матрицы). Среди всех чисел β_j ($j = 1,2, \ldots, n$) выберем наименьшее: $\boldsymbol{\beta} = \min\{\boldsymbol{\beta}_j\}$.
- Число $\boldsymbol{\beta}$ называется верхней ценой игры. Это гарантированный проигрыш игрока **B**.

Игра с седловой точкой

- Фактический выигрыш игрока **A** при разумных действиях партнеров ограничен нижней и верхней ценой игры.
- Если верхняя и нижняя цены игры совпадают, то общее значение верхней и нижней цены игры $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}=v$ называется ценой игры. В этом случае игра называется вполне определенной или игрой с седловой точкой.

- Седловой точкой называется элемент платежной матрицы, одновременно минимальный в своей строке и максимальный в своем столбце.
- Седловой точке соответствуют оптимальные стратегии игроков A_i и B_j, их совокупность - это решение игры, которое обладает следующим свойством: если один из игроков придерживается своей оптимальной стратегии, то для другого отклонение от его оптимальной стратегии невыгодно. В этом случае говорят, что игра имеет решение в чистых стратегиях.

Пример

- Найти решение игры, заданной платежной матрицей:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{array} \\
P = & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array}
\end{array}
$$

- (Игрок **A** имеет 3 стратегии: A_1;A_2;A_3. Игрок **B** имеет 4 стратегии: B_1;B_2;B_3;B_4.

Решение:

- Определим наименьшие по строкам числа α_i и наибольшие по столбцам числа β_j:

$$\begin{array}{lc} & \alpha_i \\ P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{matrix} \\ \beta_j \quad \begin{matrix} 3 & 2 & 4 & 5 \end{matrix} & \end{array}$$

- Определим нижнюю цену игры:
- $\alpha = \max\{\alpha_i\} = \max\{0,2,-1\} = 2.$
- Верхняя цена игры:
- $\beta = \min\{\beta_j\} = \min\{3,2,4,5\} = 2$.

- Поскольку $\alpha=\beta=v=2$, то платежная матрица содержит седловую точку, а игра имеет решение в чистых стратегиях.

$$\begin{array}{cc} & \alpha_i \\ P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 3 & \boxed{2} & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 0 \\ 2 \\ -1 \end{array} \\ \beta_j \quad 3 \quad 2 \quad 4 \quad 5 & \end{array}$$

- Седловая точка находится во второй строке и втором столбце, следовательно оптимальными являются стратегии A_2 и B_2. При этом цена игры $v=2$.

Решение игры в смешанных стратегиях

- Если игра не имеет седловой точки, то применение чистых стратегий не дает оптимального решения игры. В таком случае можно получить оптимальное решение, случайным образом чередуя чистые стратегии.

- **Смешанной стратегией S_A игрока A** называется применение чистых стратегий $A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots, A_m$ с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots, p_m$, причем $\sum p_i = 1$.
- Смешанные стратегии игрока **A** записываются в виде матрицы:

$$S_A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \ldots & A_i \ldots & A_m \\ p_1 & p_2 \ldots & p_i \ldots & p_m \end{bmatrix}$$

- или в виде строки $S_A = (p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots, p_m)$.

- Аналогично смешанные стратегии игрока **B** обозначаются:

$$S_B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \ldots & B_j \ldots & B_n \\ q_1 & q_2 \ldots & q_j & \ldots & q_n \end{bmatrix}$$

- или **S**$_B$=(q_1 q_2 … q_j … q_n), где Σ q_j =1.
- Чистая стратегия, которая входит в оптимальную смешанную стратегию с отличной от нуля вероятностью, называется активной.

- Если один из игроков придерживается своей оптимальной смешанной стратегии, то выигрыш остается неизменным и равным цене игры v, если второй игрок не выходит за пределы своих активных стратегий.
- Цена игры удовлетворяет неравенству: $\boldsymbol{\alpha} \le v \le \boldsymbol{\beta}$.

Сведение решения игры к задаче линейного программирования

- Рассмотрим игру, заданную платежной матрицей:

$$P = \begin{bmatrix} a_{11}a_{12}\dots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}a_{m2}\dots a_{mn} \end{bmatrix}$$

- Если такая игра имеет седловую точку, то оптимальное решение игры - это пара чистых стратегий, соответствующих этой точке.

- Предположим, что игра не имеет седловой точки.

  Найдем ее решение в смешанных стратегиях: $\mathbf{S}_A = (p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots, p_m)$ и $\mathbf{S}_B = (q_1, q_2, \ldots, q_j, \ldots, q_n)$.
- Применение игроком **А** оптимальной стратегии $\mathbf{S}_A$ должно обеспечивать ему при любых действиях игрока **В** выигрыш не меньше цены игры v.

- Определим математическое ожидание выигрыша игрока **A** в случае, если его соперник выбрал свою первую стратегию B_1.

$$P = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}a_{m2}\ldots a_{mn} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} p_1 \\ p_2 \\ \ldots \\ p_m \end{array}$$

X	a_{11}	a_{21}	…	a_{m1}
p	p_1	p_2	…	p_m

$$M_1 = a_{11}\cdot p_1 + a_{21}\cdot p_2 + \ldots + a_{m1}\cdot p_m = \sum_{i=1}^{m} a_{i1}\cdot p_i \geq v$$

- Аналогично определим $M_2, M_3, \ldots. M_n \geq v$

Поэтому выполняются следующие соотношения:

$$\sum_{i=1}^{m} p_i \cdot a_{ij} \geq v \quad для \quad j = 1,2,\ldots,n,$$

- причем $\Sigma\ p_i = 1$.
- Аналогично, для игрока **B** оптимальная стратегия **S**в должна обеспечить при любых стратегиях игрока **A** проигрыш, не превышающий величину v, т.е. справедливо соотношение:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot q_j \leq v \quad для \quad i = 1,2,\ldots,m, где \ \sum q_j = 1.$$

- Для решения этих задач используют методы линейного программирования.

Игры с природой

- В некоторых случаях успех экономической деятельности зависит не от сознательно противодействующего конкурента, а от объективной действительности, которую принято называть "природой".
- Пусть игрок **A** располагает m стратегиями, которые обозначим A_1, $A_2, \dots, A_m$, а относительно "природы" известно, что она может принимать n различных состояний, обозначим их $P_1, P_2, \dots P_n$.

- Известен выигрыш a_{ij} игрока **А** при каждой паре стратегий игрока и "природы", т.е. известна платежная матрица:

$$P = \begin{bmatrix} a_{11} a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} a_{m2} \ldots a_{mn} \end{bmatrix}$$

- Игрок **A** в играх с "природой" старается действовать осмотрительно, используя стратегию, позволяющую получить наибольший выигрыш (наименьший проигрыш).
- "Природа" (игрок **P**) действует случайно, возможные стратегии определяются как ее состояние (погода, спрос на определенную продукцию, сочетание производственных факторов).

- Различают игры с "природой" *в условиях определенности* и игры с "природой" *в условиях неопределенности*.
- В первом случае задано распределение вероятностей состояний природы, во втором - оно неизвестно. В этом случае приходится принимать решение *в условиях риска*.

- *Риском* игрока **А** при использовании стратегии A_i при состоянии "природы" P_j называется разность между выигрышем, который он получил бы, если бы знал P_j и выигрышем, который он получит в обычных условиях, применяя стратегию A_i:
- $r_{ij} = \beta_j - a_{ij}$, где $\beta_j = \max_i \{a_{ij}\}$.
- Рассмотрим критерии, используемые при решении игр с природой.

Критерий Бейеса-Лапласа

- При известном распределении вероятностей различных состояний природы **P** $=(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, где $p_1+p_2+\ldots+p_n=1$, критерием принятия решений является максимум математического ожидания выигрыша, т.е.
- $V_{B\text{-}L} = \max\limits_i \sum\limits_j a_{ij} p_j$, где $i = 1,2, \ldots, m$.

Критерий Лапласа

- Если ни одно из состояний "природы" нельзя предпочесть другим, выдвигают гипотезу о том, что все они равновероятны:
- $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = 1/n$.
- Тогда $V_L = \max\limits_{i} \sum\limits_{j} a_{ij} \cdot 1/n$.

Максиминный критерий Вальда

- Он основан на выборе стратегии игрока **A**, позволяющей гарантировать ему получение нижней цены игры:
- $V_W = \max\limits_{i} \min\limits_{j} a_{ij}.$

Критерий минимального риска Сэвиджа

- Рекомендует выбирать стратегию, при которой величина риска принимает наименьшее значение в самой неблагоприятной ситуации, т.е.
- $V_S = \min_{i} \max_{j} r_{ij}$.
- Критерии Вальда и Сэвиджа основаны на пессимистической оценке обстановки. В отличие от них следующий критерий использует как пессимистический, так и оптимистический подход к ситуации.

Критерий Гурвица

- По этому критерию выбирается максимум линейной комбинации максимальных или минимальных выигрышей.
- $V_H = \max\limits_{i} \{\lambda \min\limits_{j} a_{ij} + (1-\lambda) \max\limits_{j} a_{ij} \}.$
- Если λ=1, критерий Гурвица превращается в пессимистический критерий Вальда. При λ=0 - в критерий крайнего оптимизма, рассчитанный на наилучшее стечение обстоятельств. Обычно λ принимают в пределах от 0,5 до 0,7.

Задача

- Возможно строительство четырех типов электростанций: тепловых (стратегия A_1), приплотинных (A_2), бесшлюзовых (A_3), шлюзовых (A_4). Эффективность каждого из типов зависит от различных факторов: режима рек, стоимости топлива и его перевозки и т.п.
- Предположим, что выделено четыре различных состояния, каждое из которых означает определенное сочетание факторов, влияющих на эффективность энергетических объектов.

- Состояния природы обозначим через P_1, P_2, P_3 и P_4. Экономическая эффективность строительства отдельных видов электростанций изменяется в зависимости от состояний природы и задана матрицей:

$$P = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 8 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 12 \\ 8 & 5 & 3 & 10 \\ 1 & 4 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

- Проанализировать ситуацию и выбрать оптимальную стратегию:

а) на основе критерия Бейеса - Лапласа при заданном распределении вероятности состояний природы **P** = (1/7, 2/7, 3/7, 1/7);

- б) на основе критерия Лапласа в предположении, что все состояния природы равновероятны;
- в) используя максиминный критерий Вальда;
- г) на базе критерия минимального риска Сэвиджа;
- д) на основе критерия Гурвица при $\lambda = 0{,}6$.

Решение:

- а) Определим математические ожидания выигрыша игрока **A** при выборе им стратегии A_i:
- $A_1 \Rightarrow M_1 = 5 \cdot 1/7 + 2 \cdot 2/7 + 8 \cdot 3/7 + 4 \cdot 1/7 = 37/7 \approx 5{,}29$;
- $A_2 \Rightarrow M_2 = 2 \cdot 1/7 + 3 \cdot 2/7 + 4 \cdot 3/7 + 12 \cdot 1/7 = 32/7 \approx 4{,}57$;
- $A_3 \Rightarrow M_3 = 8 \cdot 1/7 + 5 \cdot 2/7 + 3 \cdot 3/7 + 10 \cdot 1/7 = 37/7 \approx 5{,}29$;
- $A_4 \Rightarrow M_4 = 1 \cdot 1/7 + 4 \cdot 2/7 + 2 \cdot 3/7 + 8 \cdot 1/7 = 23/7 \approx 3{,}29$.
- $V_{B\text{-}L} = \max\{5{,}29;\ 4{,}57;\ 5{,}29;\ 3{,}29\} = 5{,}29$.
- В соответствии с этим по критерию Бейеса-Лапласа наиболее предпочтительными являются

- б) Если предположить, что все состояния природы равновероятны, то $p_1 = p_2 = p_3 = = p_4 = 1/4$.
- Определим математические ожидания выигрыша игрока **A** при выборе им стратегии A_i:
- $A_1 \Rightarrow \sum a_{1j} /4 = (5+2+8+4)/4 = 19/4 = 4{,}75$;
- $A_2 \Rightarrow \sum a_{2j} /4 = (2+3+4+12)/4 = 21/4 = 5{,}25$;
- $A_3 \Rightarrow \sum a_{3j} /4 = (8+5+3+10)/4 = 26/4 = 6{,}5$;
- $A_4 \Rightarrow \sum a_{4j} /4 = (1+4+2+8)/4 = 15/4 = 3{,}75$.
- Поскольку $V_L = max \{4{,}75;\ 5{,}25;\ 6{,}5;\ 3{,}75\} = 6{,}5$, то по критерию Лапласа оптимальной является стратегия A_3.

- в) Согласно критерию Вальда
- $V_W = \max_i \min_j a_{ij} = \max\{2,2,3,1\} = 3$
- Следовательно максиминная стратегия игрока **A** - A_3.
- г) Построим матрицу рисков.

$$P = \begin{bmatrix} 5 & 2 & \boxed{8} & 4 \\ 2 & 3 & 4 & \boxed{12} \\ \boxed{8} & \boxed{5} & 3 & 10 \\ 1 & 4 & 2 & 8 \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 & 8 \\ 6 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 7 & 1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

- Согласно критерию Сэвиджа определяем:
- $V_S = \min \max r_{ij} = \min\{8,6,5,7\} = 5.$

$$R = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 & \boxed{8} \\ \boxed{6} & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{5} & 2 \\ \boxed{7} & 1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

- В соответствии с этим критерием также наиболее предпочтительна стратегия A_3.

- д) Воспользуемся критерием Гурвица при при $\boldsymbol{\lambda} = 0,6$. Определим значение $V_H = max\{\boldsymbol{\lambda} min\ a_{ij} + (1-\boldsymbol{\lambda}) max\ a_{ij}\} =$ $= max\{0,6\ min\ a_{ij} + 0,4\ max\ a_{ij}\} =$ $= max\{0,6 \cdot 2 + 0,4 \cdot 8;\ 0,6 \cdot 2 + 0,4 \cdot 12;\ 0,6 \cdot 3 + 0,4 \cdot 10;\ 0,6 \cdot 1 + 0,4 \cdot 8\} = max\{4,4;\ 6,0;\ 5,8;\ 3,8\} = 6,0$. Таким образом, согласно критерию Гурвица оптимальной является стратегия A_2.
- Анализ результатов проведенных на основе различных критериев исследований показывает, что доминирующей является стратегия A_3.