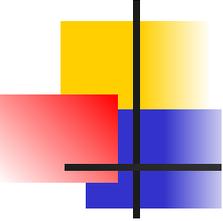


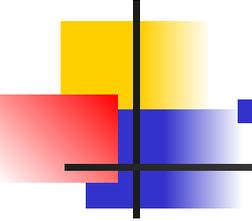
Модели принятия решений в условиях неопределенности

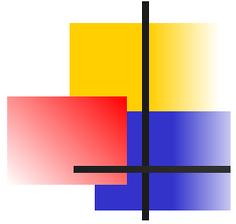
Теория игр

Основные вопросы

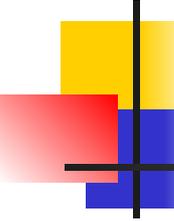
- 
- 1. Основные понятия теории игр.
 - 2. Нижняя и верхняя цена игры.
 - 3. Игра с седловой точкой.
 - 4. Решение игры в смешанных стратегиях.
 - 5. Сведение решения игры к задаче линейного программирования.
 - 6. Игры с природой.

Основные понятия теории игр

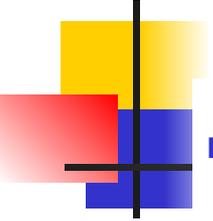
- 
- **Игрой** называется математическая модель конфликтной ситуации. Стороны, участвующие в конфликте, называются участниками игры или игроками, а исход конфликта - выигрышем.
 - Игра ведется по определенным правилам, которые представляют собой систему условий, регламентирующих возможные действия игроков.

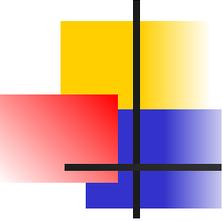


- **Ходом** называется выбор одного из предложенных правилами игры действий и его осуществление.
- **Стратегией игрока** называется совокупность правил, определяющих выбор его действий при каждом личном ходе в зависимости от сложившейся ситуации.

- 
- Для того, чтобы найти **решение игры**, следует для каждого игрока выбрать стратегию, которая удовлетворяет **условию оптимальности**, т.е. один из игроков должен получить **максимальный выигрыш**, когда второй придерживается своей стратегии. В то же время второй игрок должен иметь **минимальный проигрыш**, если первый придерживается своей стратегии. Такие стратегии называются **оптимальными**. Любому из игроков невыгодно отказаться от своей стратегии в игре.

Математическая модель задачи

- 
- Пусть игрок **A** располагает m стратегиями, которые обозначим A_1, A_2, \dots, A_m . Пусть у игрока **B** имеется n стратегий, обозначим их B_1, B_2, \dots, B_n . В этом случае игра имеет размерность $m \times n$. В результате выбора игроками любой пары стратегий A_i и B_j ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$) однозначно определяется исход игры, т.е. выигрыш a_{ij} игрока **A** (положительный или отрицательный) и проигрыш ($-a_{ij}$) игрока **B**.

- 
- Предположим, что значения a_{ij} известны для любой пары стратегий (A_i, B_j) .
Матрица $P = (a_{ij})$, $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$, элементами которой являются выигрыши, соответствующие стратегиям A_i и B_j , называется **платежной матрицей** или **матрицей игры**:

$$P = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

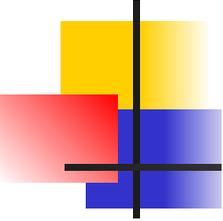
Нижняя цена игры

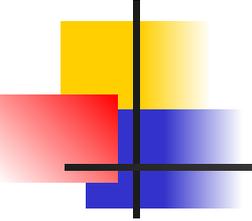
- Обозначим через a_i наименьший выигрыш игрока **A** при выборе им стратегии A_i для всех возможных стратегий игрока **B** (наименьшее число в i -ой строке платежной матрицы). Среди всех чисел a_i ($i = 1, 2, \dots, m$) выберем наибольшее: $a = \max \{a_i\}$.
- Число a называется **нижней ценой игры**. Это гарантированный выигрыш игрока **A** при любой стратегии игрока **B**.

Верхняя цена игры

- Игрок **B** заинтересован в том, чтобы уменьшить выигрыш игрока **A**, (а следовательно - свой проигрыш). Выбирая стратегию V_j , он учитывает максимально возможный при этом выигрыш игрока **A**. Обозначим β_j наибольший возможный выигрыш игрока при выборе игроком **B** его стратегии V_j (наибольшее число в j -ом столбце платежной матрицы). Среди всех чисел β_j ($j = 1, 2, \dots, n$) выберем наименьшее: $\beta = \min\{\beta_j\}$.
- Число β называется **верхней ценой игры**. Это гарантированный проигрыш игрока **B**.

Игра с седловой точкой

- 
- Фактический выигрыш игрока **A** при разумных действиях партнеров ограничен нижней и верхней ценой игры.
 - Если верхняя и нижняя цены игры совпадают, то общее значение верхней и нижней цены игры $\alpha = \beta = v$ называется **ценой игры**. В этом случае игра называется **вполне определенной** или **игрой с седловой точкой**.

- 
- **Седловой точкой** называется элемент платежной матрицы, одновременно **минимальный в своей строке** и **максимальный в своем столбце**.
 - Седловой точке соответствуют **оптимальные стратегии игроков A_i и B_j** , их совокупность - это **решение игры**, которое обладает следующим свойством: если один из игроков придерживается своей оптимальной стратегии, то для другого отклонение от его оптимальной стратегии невыгодно. В этом случае говорят, что **игра имеет решение в чистых стратегиях**.

Пример

- Найти решение игры, заданной платежной матрицей:

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_3 & \mathbf{B}_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{array} \right] \begin{array}{c} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 \end{array} \end{array}$$

- (Игрок **A** имеет 3 стратегии: $A_1; A_2; A_3$.
Игрок **B** имеет 4 стратегии: $B_1; B_2; B_3; B_4$.)

Решение:

- Определим наименьшие по строкам числа α_i и наибольшие по столбцам числа β_j :

$$P = \begin{array}{cccc|c} & & & & \alpha_i \\ \hline & 1 & 0 & 3 & 5 & 0 \\ & 3 & 2 & 4 & 3 & 2 \\ & 0 & 1 & -1 & 4 & -1 \\ \hline & \beta_j & 3 & 2 & 4 & 5 & \end{array}$$

- Определим нижнюю цену игры:
- $\alpha = \max \{ \alpha_i \} = \max \{ 0, 2, -1 \} = 2.$
- Верхняя цена игры:
- $\beta = \min \{ \beta_j \} = \min \{ 3, 2, 4, 5 \} = 2.$

- Поскольку $\alpha = \beta = v = 2$, то платежная матрица содержит седловую точку, а игра имеет решение в чистых стратегиях.

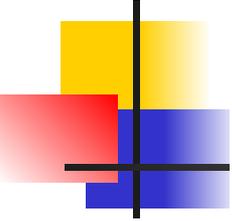
$$P = \begin{array}{cccc}
 & \alpha_i & & & \\
 & 0 & & & \\
 & 2 & & & \\
 & -1 & & & \\
 \beta_j & 3 & 2 & 4 & 5
 \end{array}$$

- Седловая точка находится во второй строке и втором столбце, следовательно оптимальными являются стратегии A_2 и B_2 . При этом цена игры $v = 2$.



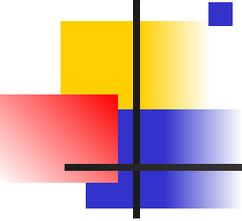
Решение игры в смешанных стратегиях

- Если игра не имеет седловой точки, то применение чистых стратегий не дает оптимального решения игры. В таком случае можно получить оптимальное решение, случайным образом чередуя чистые стратегии.

- 
- Смешанной стратегией S_A игрока A называется применение чистых стратегий $A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_m$ с вероятностями $p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_m$, причем $\sum p_i = 1$.
 - Смешанные стратегии игрока A записываются в виде матрицы:

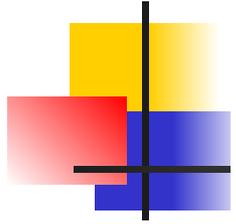
$$S_A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \dots & A_i \dots & A_m \\ p_1 & p_2 \dots & p_i \dots & p_m \end{bmatrix}$$

- или в виде строки $S_A = (p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_m)$.

- 
- Аналогично смешанные стратегии игрока **B** обозначаются:
-

$$S_B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \dots & B_j \dots & B_n \\ q_1 & q_2 \dots & q_j & \dots & q_n \end{bmatrix}$$

- или $\mathbf{S}_B = (q_1 \quad q_2 \dots q_j \dots q_n)$, где $\sum q_j = 1$.
- Чистая стратегия, которая **входит в оптимальную смешанную стратегию с отличной от нуля вероятностью**, называется **активной**.



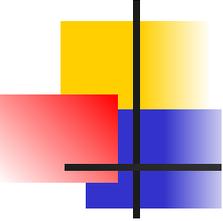
- Если один из игроков придерживается своей оптимальной смешанной стратегии, то выигрыш остается неизменным и равным цене игры v , если второй игрок не выходит за пределы своих активных стратегий.
- Цена игры удовлетворяет неравенству: $\alpha \leq v \leq \beta$.

Сведение решения игры к задаче линейного программирования

- Рассмотрим игру, заданную платежной матрицей:

$$P = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- Если такая игра имеет седловую точку, то оптимальное решение игры - это пара чистых стратегий, соответствующих этой точке.

- 
- Предположим, что игра не имеет седловой точки.

Найдем ее решение в смешанных стратегиях: $\mathbf{S}_A = (p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_m)$ и $\mathbf{S}_B = (q_1, q_2, \dots, q_j, \dots, q_n)$.

- Применение игроком **A** оптимальной стратегии \mathbf{S}_A должно обеспечивать ему при любых действиях игрока **B** выигрыш не меньше цены игры v .

- Определим математическое ожидание выигрыша игрока **A** в случае, если его соперник выбрал свою первую стратегию V_1 .

$$P = \begin{bmatrix} a_{11} a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots \\ a_{m1} a_{m2} \dots a_{mn} \end{bmatrix} \begin{matrix} p_1 \\ p_2 \\ \dots \\ p_m \end{matrix} \quad \mathbf{X} \quad \begin{matrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ p & p_1 & p_2 & \dots & p_m \end{matrix}$$

$$M_1 = a_{11} \cdot p_1 + a_{21} \cdot p_2 + \dots + a_{m1} \cdot p_m = \sum_{i=1}^m a_{i1} \cdot p_i \geq v$$

- Аналогично определим $M_2, M_3, \dots, M_n \geq v$

Поэтому выполняются следующие соотношения:

$$\sum_{i=1}^m p_i \cdot a_{ij} \geq v \quad \text{для } j = 1, 2, \dots, n,$$

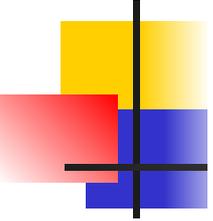
■ причем $\sum p_i = 1$.

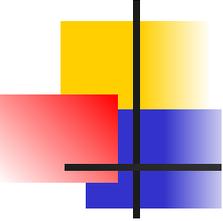
- Аналогично, для игрока **В** оптимальная стратегия **S_v** должна обеспечить при любых стратегиях игрока **А** проигрыш, не превышающий величину v , т.е. справедливо соотношение:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot q_j \leq v \quad \text{для } i = 1, 2, \dots, m, \text{ где } \sum q_j = 1.$$

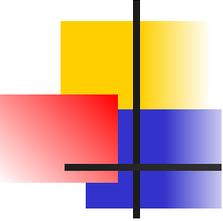
- Для решения этих задач используют методы линейного программирования.

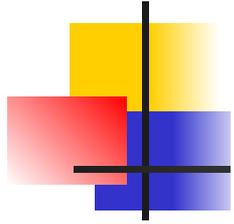
Игры с природой

- 
- В некоторых случаях успех экономической деятельности зависит не от сознательно противодействующего конкурента, а от объективной действительности, которую принято называть "природой".
 - Пусть игрок **A** располагает m стратегиями, которые обозначим A_1, A_2, \dots, A_m , а относительно "природы" известно, что она может принимать n различных состояний, обозначим их P_1, P_2, \dots, P_n .

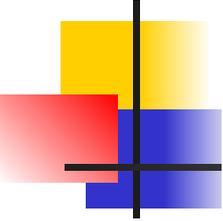
- 
- Известен выигрыш a_{ij} игрока **A** при каждой паре стратегий игрока и "природы", т.е. известна платежная матрица:

$$P = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- 
- Игрок **A** в играх с "природой" старается действовать осмотрительно, используя стратегию, позволяющую получить наибольший выигрыш (наименьший проигрыш).
 - "Природа" (игрок **P**) действует случайно, возможные стратегии определяются как ее состояние (погода, спрос на определенную продукцию, сочетание производственных факторов).



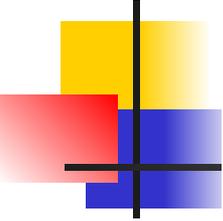
- Различают игры с "природой" *в условиях определенности* и игры с "природой" *в условиях неопределенности*.
- В первом случае задано распределение вероятностей состояний природы, во втором - оно неизвестно. В этом случае приходится принимать решение *в условиях риска*.

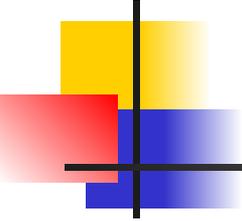
- 
- *Риском* игрока **A** при использовании стратегии A_i при состоянии "природы" P_j называется разность между выигрышем, который он получил бы, если бы знал P_j и выигрышем, который он получит в обычных условиях, применяя стратегию A_i :

- $r_{ij} = \beta_j - a_{ij}$, где $\beta_j = \max_i \{a_{ij}\}$.

-
- Рассмотрим критерии, используемые при решении игр с природой.

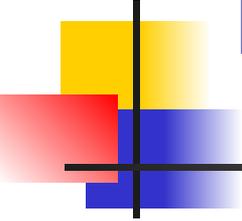
Критерий Бейеса-Лапласа

- 
- При известном распределении вероятностей различных состояний природы $\mathbf{P} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$, где $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$, критерием принятия решений является максимум математического ожидания выигрыша, т.е.
 - $V_{B-L} = \max_i \sum_j a_{ij} p_j$, где $i = 1, 2, \dots, m$.



Критерий Лапласа

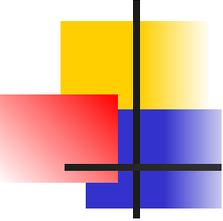
- Если ни одно из состояний "природы" нельзя предпочесть другим, выдвигают гипотезу о том, что все они равновероятны:
- $p_1 = p_2 = \dots = p_n = 1/n$.
- Тогда $V_L = \max_i \sum_j a_{ij} \cdot 1/n$.



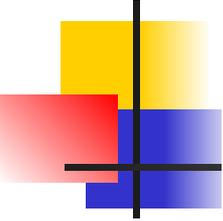
Максиминный критерий Вальда

- Он основан на выборе стратегии игрока **A**, позволяющей гарантировать ему получение нижней цены игры:
- $V_w = \max_i \min_j a_{ij}$.

Критерий минимального риска Сэвиджа

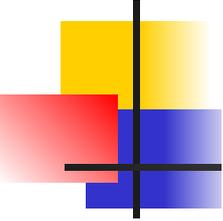
- 
- Рекомендует выбирать стратегию, при которой величина риска принимает наименьшее значение в самой неблагоприятной ситуации, т.е.
 - $V_s = \min_i \max_j r_{ij}$.
 - Критерии Вальда и Сэвиджа основаны на пессимистической оценке обстановки. В отличие от них следующий критерий использует как пессимистический, так и оптимистический подход к ситуации.

Критерий Гурвица

- 
- По этому критерию выбирается максимум линейной комбинации максимальных или минимальных выигрышей.
 - $V_H = \max_i \{ \lambda \min_j a_{ij} + (1-\lambda) \max_j a_{ij} \}$.
 - Если $\lambda=1$, критерий Гурвица превращается в пессимистический критерий Вальда. При $\lambda=0$ - в критерий крайнего оптимизма, рассчитанный на наилучшее стечение обстоятельств. Обычно λ принимают в пределах от 0,5 до 0,7.

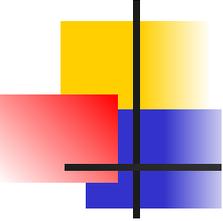
Задача

- Возможно строительство четырех типов электростанций: тепловых (стратегия A_1), приплотинных (A_2), бесшлюзовых (A_3), шлюзовых (A_4). Эффективность каждого из типов зависит от различных факторов: режима рек, стоимости топлива и его перевозки и т.п.
- Предположим, что выделено четыре различных состояния, каждое из которых означает определенное сочетание факторов, влияющих на эффективность энергетических объектов.

- 
- Состояния природы обозначим через P_1 , P_2 , P_3 и P_4 . Экономическая эффективность строительства отдельных видов электростанций изменяется в зависимости от состояний природы и задана матрицей:

$$P = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 8 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 12 \\ 8 & 5 & 3 & 10 \\ 1 & 4 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

- Проанализировать ситуацию и выбрать оптимальную стратегию:



а) на основе критерия Бейеса - Лапласа при заданном распределении вероятности состояний природы

$$\mathbf{P} = (1/7, 2/7, 3/7, 1/7);$$

- б) на основе критерия Лапласа в предположении, что все состояния природы равновероятны;
- в) используя максиминный критерий Вальда;
- г) на базе критерия минимального риска Сэвиджа;
- д) на основе критерия Гурвица при $\lambda = 0,6$.

Решение:

- а) Определим математические ожидания выигрыша игрока **A** при выборе им стратегии **A_i**:
- $A_1 \Rightarrow M_1 = 5 \cdot 1/7 + 2 \cdot 2/7 + 8 \cdot 3/7 + 4 \cdot 1/7 = 37/7 \approx 5,29;$
- $A_2 \Rightarrow M_2 = 2 \cdot 1/7 + 3 \cdot 2/7 + 4 \cdot 3/7 + 12 \cdot 1/7 = 32/7 \approx 4,57;$
- $A_3 \Rightarrow M_3 = 8 \cdot 1/7 + 5 \cdot 2/7 + 3 \cdot 3/7 + 10 \cdot 1/7 = 37/7 \approx 5,29;$
- $A_4 \Rightarrow M_4 = 1 \cdot 1/7 + 4 \cdot 2/7 + 2 \cdot 3/7 + 8 \cdot 1/7 = 23/7 \approx 3,29.$
- $V_{B-L} = \max \{5,29; 4,57; 5,29; 3,29\} = 5,29.$
- В соответствии с этим по критерию Бейеса-Лапласа наиболее предпочтительными являются

- б) Если предположить, что все состояния природы равновероятны, то $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 1/4$.
- Определим математические ожидания выигрыша игрока **A** при выборе им стратегии **A_i**:
 - $A_1 \Rightarrow \sum a_{1j} / 4 = (5+2+8+4)/4 = 19/4 = 4,75$;
 - $A_2 \Rightarrow \sum a_{2j} / 4 = (2+3+4+12)/4 = 21/4 = 5,25$;
 - $A_3 \Rightarrow \sum a_{3j} / 4 = (8+5+3+10)/4 = 26/4 = 6,5$;
 - $A_4 \Rightarrow \sum a_{4j} / 4 = (1+4+2+8)/4 = 15/4 = 3,75$.
- Поскольку $V_L = \max \{4,75; 5,25; 6,5; 3,75\} = 6,5$, то по критерию Лапласа оптимальной является стратегия **A₃**.

- В) Согласно критерию Вальда

- $V_W = \max_i \min_j a_{ij} = \max \{2, 2, 3, 1\} = 3$

- Следовательно максиминная стратегия игрока **A** - **A₃**.

- г) Построим матрицу рисков.

- $$P = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 8 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 12 \\ 8 & 5 & 3 & 10 \\ 1 & 4 & 2 & 8 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 & 8 \\ 6 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 7 & 1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

- Согласно критерию Сэвиджа определяем:

$$V_s = \min \max r_{ij} = \min\{8, 6, 5, 7\} = 5.$$

$$R = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 & 8 \\ 6 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 7 & 1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

- В соответствии с этим критерием также наиболее предпочтительна стратегия A_3 .

- д) Воспользуемся критерием Гурвица при $\lambda = 0,6$. Определим значение $V_H = \max \{ \lambda \min a_{ij} + (1-\lambda) \max a_{ij} \} =$
 $= \max \{ 0,6 \min a_{ij} + 0,4 \max a_{ij} \} =$
 $= \max \{ 0,6 \cdot 2 + 0,4 \cdot 8; 0,6 \cdot 2 + 0,4 \cdot 12;$
 $0,6 \cdot 3 + 0,4 \cdot 10; 0,6 \cdot 1 + 0,4 \cdot 8 \} = \max \{ 4,4;$
 $6,0; 5,8; 3,8 \} = 6,0$. Таким образом,
согласно критерию Гурвица оптимальной
является стратегия A_2 .
- Анализ результатов проведенных на
основе различных критериев
исследований показывает, что
доминирующей является стратегия A_3 .