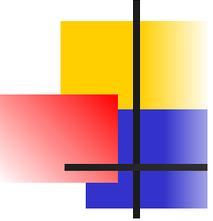


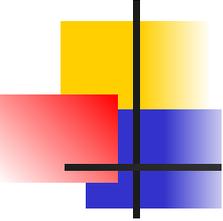


# Игры с «природой»

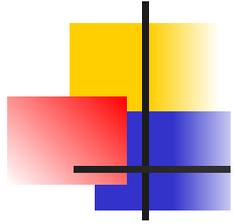
---

# Игры с природой

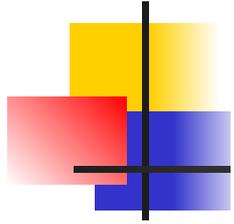
- 
- В некоторых случаях успех экономической деятельности зависит не от сознательно противодействующего конкурента, а от объективной действительности, которую принято называть «природой» или «средой».
  - Пусть игрок **A** располагает  $m$  стратегиями, которые обозначим  $A_1, A_2, \dots, A_m$ , а относительно «среды» известно, что она может принимать  $n$  различных состояний, обозначим их  $P_1, P_2, \dots, P_n$ .

- 
- Известен выигрыш (доход)  $a_{ij}$  игрока **A** при каждой паре стратегий игрока и «среды», т.е. известна платежная матрица:

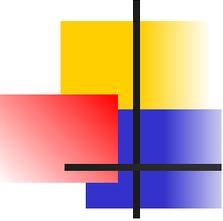
$$P = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$



- Игрок **A** в играх с "природой" старается действовать осмотрительно, используя стратегию, позволяющую получить наибольший выигрыш (наименьший проигрыш).
- "Природа" (игрок **P**) действует случайно, возможные стратегии определяются как ее состояние (погода, спрос на определенную продукцию, сочетание производственных факторов).



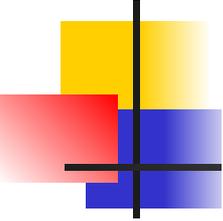
- Различают игры с "природой" *в условиях определенности* и игры с "природой" *в условиях неопределенности*.
- В первом случае задано распределение вероятностей состояний природы, во втором - оно неизвестно. В этом случае приходится принимать решение *в условиях риска*.

- 
- *Риском* игрока **A** при использовании стратегии  $A_i$  при состоянии "природы"  $P_j$  называется разность между выигрышем, который он получил бы, если бы знал  $P_j$  и выигрышем, который он получит в обычных условиях, применяя стратегию  $A_i$ :

- $r_{ij} = \beta_j - a_{ij}$ , где  $\beta_j = \max_i \{a_{ij}\}$ .

- 
- Рассмотрим критерии, используемые при решении игр с природой.

# Критерий Бейеса-Лапласа

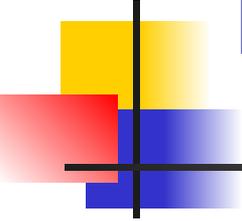
- 
- При известном распределении вероятностей различных состояний природы  $\mathbf{P} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ , где  $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$ , критерием принятия решений является максимум математического ожидания выигрыша, т.е.
  - $V_{B-L} = \max_i \sum_j a_{ij} p_j$ , где  $i = 1, 2, \dots, m$ .



# Критерий Лапласа

---

- Если ни одно из состояний "природы" нельзя предпочесть другим, выдвигают гипотезу о том, что все они равновероятны:
- $p_1 = p_2 = \dots = p_n = 1/n$ .
- Тогда  $V_L = \max_i \sum_j a_{ij} \cdot 1/n$ .

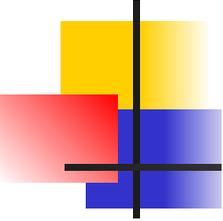


# Максиминный критерий Вальда

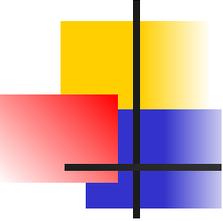
---

- Он основан на выборе стратегии игрока **A**, позволяющей гарантировать ему получение нижней цены игры:
- $V_w = \max_i \min_j a_{ij}.$

# Критерий минимального риска Сэвиджа

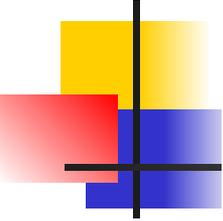
- 
- Рекомендует выбирать стратегию, при которой величина риска принимает наименьшее значение в самой неблагоприятной ситуации, т.е.
  - $V_s = \min_i \max_j r_{ij}$ .
  - Критерии Вальда и Сэвиджа основаны на пессимистической оценке обстановки. В отличие от них следующий критерий использует как пессимистический, так и оптимистический подход к ситуации.

# Критерий Гурвица

- 
- По этому критерию выбирается максимум линейной комбинации максимальных или минимальных выигрышей.
  - $V_H = \max_i \{ \lambda \min_j a_{ij} + (1-\lambda) \max_j a_{ij} \}$ .
  - Если  $\lambda=1$ , критерий Гурвица превращается в пессимистический критерий Вальда. При  $\lambda=0$  - в критерий крайнего оптимизма, рассчитанный на наилучшее стечение обстоятельств. Обычно  $\lambda$  принимают в пределах от 0,5 до 0,7.

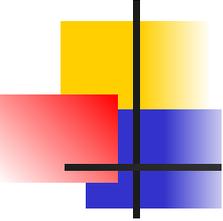
# Задача

- Возможно строительство четырех типов электростанций: тепловых (стратегия  $A_1$ ), приплотинных ( $A_2$ ), бесшлюзовых ( $A_3$ ), шлюзовых ( $A_4$ ). Эффективность каждого из типов зависит от различных факторов: режима рек, стоимости топлива и его перевозки и т.п.
- Предположим, что выделено четыре различных состояния, каждое из которых означает определенное сочетание факторов, влияющих на эффективность энергетических объектов.

- 
- Состояния природы обозначим через  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  и  $P_4$ . Экономическая эффективность строительства отдельных видов электростанций изменяется в зависимости от состояний природы и задана матрицей:

$$P = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 8 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 12 \\ 8 & 5 & 3 & 10 \\ 1 & 4 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

- Проанализировать ситуацию и выбрать оптимальную стратегию:



а) на основе критерия Бейеса - Лапласа при заданном распределении вероятности состояний природы

$$\mathbf{P} = (1/7, 2/7, 3/7, 1/7);$$

- б) на основе критерия Лапласа в предположении, что все состояния природы равновероятны;
- в) используя максиминный критерий Вальда;
- г) на базе критерия минимального риска Сэвиджа;
- д) на основе критерия Гурвица при  $\lambda = 0,6$ .

# Решение:

- а) Определим математические ожидания выигрыша игрока **A** при выборе им стратегии **A<sub>i</sub>**:
- $A_1 \Rightarrow M_1 = 5 \cdot 1/7 + 2 \cdot 2/7 + 8 \cdot 3/7 + 4 \cdot 1/7 = 37/7 \approx 5,29;$
- $A_2 \Rightarrow M_2 = 2 \cdot 1/7 + 3 \cdot 2/7 + 4 \cdot 3/7 + 12 \cdot 1/7 = 32/7 \approx 4,57;$
- $A_3 \Rightarrow M_3 = 8 \cdot 1/7 + 5 \cdot 2/7 + 3 \cdot 3/7 + 10 \cdot 1/7 = 37/7 \approx 5,29;$
- $A_4 \Rightarrow M_4 = 1 \cdot 1/7 + 4 \cdot 2/7 + 2 \cdot 3/7 + 8 \cdot 1/7 = 23/7 \approx 3,29.$
- $V_{B-L} = \max \{5,29; 4,57; 5,29; 3,29\} = 5,29.$
- В соответствии с этим по критерию Бейеса-Лапласа наиболее предпочтительными являются

- б) Если предположить, что все состояния природы равновероятны, то  $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 1/4$ .
- Определим математические ожидания выигрыша игрока **A** при выборе им стратегии **A<sub>i</sub>**:
  - $A_1 \Rightarrow \sum a_{1j} / 4 = (5+2+8+4)/4 = 19/4 = 4,75$ ;
  - $A_2 \Rightarrow \sum a_{2j} / 4 = (2+3+4+12)/4 = 21/4 = 5,25$ ;
  - $A_3 \Rightarrow \sum a_{3j} / 4 = (8+5+3+10)/4 = 26/4 = 6,5$ ;
  - $A_4 \Rightarrow \sum a_{4j} / 4 = (1+4+2+8)/4 = 15/4 = 3,75$ .
- Поскольку  $V_L = \max \{4,75; 5,25; 6,5; 3,75\} = 6,5$ , то по критерию Лапласа оптимальной является стратегия **A<sub>3</sub>**.

- В) Согласно критерию Вальда

- $V_W = \max_i \min_j a_{ij} = \max \{2, 2, 3, 1\} = 3$

- Следовательно максиминная стратегия игрока **A** - **A<sub>3</sub>**.

- г) Построим матрицу рисков.

- $$P = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 8 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 12 \\ 8 & 5 & 3 & 10 \\ 1 & 4 & 2 & 8 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 & 8 \\ 6 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 7 & 1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

- Согласно критерию Сэвиджа определяем:

$$V_s = \min \max r_{ij} = \min\{8, 6, 5, 7\} = 5.$$

$$R = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 & 8 \\ 6 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 7 & 1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

- В соответствии с этим критерием также наиболее предпочтительна стратегия  $A_3$ .

- д) Воспользуемся критерием Гурвица при  $\lambda = 0,6$ . Определим значение  $V_H = \max \{ \lambda \min a_{ij} + (1-\lambda) \max a_{ij} \} =$   
 $= \max \{ 0,6 \min a_{ij} + 0,4 \max a_{ij} \} =$   
 $= \max \{ 0,6 \cdot 2 + 0,4 \cdot 8; 0,6 \cdot 2 + 0,4 \cdot 12;$   
 $0,6 \cdot 3 + 0,4 \cdot 10; 0,6 \cdot 1 + 0,4 \cdot 8 \} = \max \{ 4,4;$   
 $6,0; 5,8; 3,8 \} = 6,0$ . Таким образом,  
согласно критерию Гурвица оптимальной  
является стратегия  $A_2$ .
- Анализ результатов проведенных на  
основе различных критериев  
исследований показывает, что  
доминирующей является стратегия  $A_3$ .