Игры с «природой»

Игры с природой

- В некоторых случаях успех экономической деятельности зависит не от сознательно противодействующего конкурента, а от объективной действительности, которую принято называть «природой» или «средой».
- Пусть игрок **A** располагает m стратегиями, которые обозначим A_1, A_2, … , A_m, а относительно «среды» известно, что она может принимать n различных состояний, обозначим их P_1, P_2, **…** P_n.

- Известен выигрыш (доход) a_{ij} игрока **A** при каждой паре стратегий игрока и «среды», т.е. известна платежная матрица:

$$P = \begin{bmatrix} a_{11} a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} a_{m2} \ldots a_{mn} \end{bmatrix}$$

- Игрок **A** в играх с "природой" старается действовать осмотрительно, используя стратегию, позволяющую получить наибольший выигрыш (наименьший проигрыш).
- "Природа" (игрок **P**) действует случайно, возможные стратегии определяются как ее состояние (погода, спрос на определенную продукцию, сочетание производственных факторов).

- Различают игры с "природой" *в условиях определенности* и игры с "природой" *в условиях неопределенности*.
- В первом случае задано распределение вероятностей состояний природы, во втором - оно неизвестно. В этом случае приходится принимать решение *в условиях риска*.

- *Риском* игрока **A** при использовании стратегии A_i при состоянии "природы" P_j называется разность между выигрышем, который он получил бы, если бы знал P_j и выигрышем, который он получит в обычных условиях, применяя стратегию A_i:
- $r_{ij} = \beta_j - a_{ij}$, где $\beta_j = \max_i \{a_{ij}\}$.
- Рассмотрим критерии, используемые при решении игр с природой.

Критерий Бейеса-Лапласа

- При известном распределении вероятностей различных состояний природы **P** =(p_1, p_2, …, p_n,), где $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$, критерием принятия решений является максимум математического ожидания выигрыша, т.е.
- $V_{B\text{-}L} = \max\limits_{i} \sum\limits_{j} a_{ij}\, p_j$, где i = 1,2, …, m.

Критерий Лапласа

- Если ни одно из состояний "природы" нельзя предпочесть другим, выдвигают гипотезу о том, что все они равновероятны:
- $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = 1/n$.
- Тогда $V_L = \max_i \sum_j a_{ij} \cdot 1/n$.

Максиминный критерий Вальда

- Он основан на выборе стратегии игрока **А**, позволяющей гарантировать ему получение нижней цены игры:
- $V_W = \max_{i} \min_{j} a_{ij}.$

Критерий минимального риска Сэвиджа

- Рекомендует выбирать стратегию, при которой величина риска принимает наименьшее значение в самой неблагоприятной ситуации, т.е.
- $V_S = \min_i \max_j r_{ij}$.
- Критерии Вальда и Сэвиджа основаны на пессимистической оценке обстановки. В отличие от них следующий критерий использует как пессимистический, так и оптимистический подход к ситуации.

Критерий Гурвица

- По этому критерию выбирается максимум линейной комбинации максимальных или минимальных выигрышей.
- $V_H = \max\limits_{i} \{\lambda \min\limits_{j} a_{ij} + (1-\lambda) \max\limits_{j} a_{ij}\}.$
- Если $\lambda=1$, критерий Гурвица превращается в пессимистический критерий Вальда. При $\lambda=0$ - в критерий крайнего оптимизма, рассчитанный на наилучшее стечение обстоятельств. Обычно λ принимают в пределах от 0,5 до 0,7.

Задача

- Возможно строительство четырех типов электростанций: тепловых (стратегия A_1), приплотинных (A_2), бесшлюзовых (A_3), шлюзовых (A_4). Эффективность каждого из типов зависит от различных факторов: режима рек, стоимости топлива и его перевозки и т.п.
- Предположим, что выделено четыре различных состояния, каждое из которых означает определенное сочетание факторов, влияющих на эффективность энергетических объектов.

- Состояния природы обозначим через P_1, P_2, P_3 и P_4. Экономическая эффективность строительства отдельных видов электростанций изменяется в зависимости от состояний природы и задана матрицей:

$$P = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 8 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 12 \\ 8 & 5 & 3 & 10 \\ 1 & 4 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

- Проанализировать ситуацию и выбрать оптимальную стратегию:

а) на основе критерия Бейеса - Лапласа при заданном распределении вероятности состояний природы **P** = (1/7, 2/7, 3/7, 1/7);

- б) на основе критерия Лапласа в предположении, что все состояния природы равновероятны;
- в) используя максиминный критерий Вальда;
- г) на базе критерия минимального риска Сэвиджа;
- д) на основе критерия Гурвица при $\lambda = 0{,}6$.

Решение:

- а) Определим математические ожидания выигрыша игрока **A** при выборе им стратегии A_i**:**
- $A_1 \Rightarrow M_1 = 5\cdot1/7 + 2\cdot2/7+8\cdot3/7+4\cdot1/7 = 37/7\approx 5,29$;
- $A_2 \Rightarrow M_2 = 2\cdot1/7 + 3\cdot2/7+4\cdot3/7+12\cdot1/7 = 32/7\approx 4,57$;
- $A_3 \Rightarrow M_3 = 8\cdot1/7 + 5\cdot2/7+3\cdot3/7+10\cdot1/7 = 37/7\approx 5,29$;
- $A_4 \Rightarrow M_4 = 1\cdot1/7 + 4\cdot2/7+2\cdot3/7+8\cdot1/7 = 23/7\approx 3,29$.
- $V_{B\text{-}L} = max\,\{5,29;\ 4,57;\ 5,29;\ 3,29\} = 5,29$.
- В соответствии с этим по критерию Бейеса-Лапласа наиболее предпочтительными являются

- б) Если предположить, что все состояния природы равновероятны, то $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 1/4$.
- Определим математические ожидания выигрыша игрока **A** при выборе им стратегии A_i**:**
- $A_1 \Rightarrow \sum a_{1j} /4 = (5+2+8+4)/4 = 19/4 = 4{,}75;$
- $A_2 \Rightarrow \sum a_{2j} /4 = (2+3+4+12)/4 = 21/4 = 5{,}25;$
- $A_3 \Rightarrow \sum a_{3j} /4 = (8+5+3+10)/4 = 26/4 = 6{,}5;$
- $A_4 \Rightarrow \sum a_{4j} /4 = (1+4+2+8)/4 = 15/4 = 3{,}75.$
- Поскольку $V_L = max\{4{,}75;\ 5{,}25;\ 6{,}5;\ 3{,}75\} = 6{,}5$, то по критерию Лапласа оптимальной является стратегия A_3.

- в) Согласно критерию Вальда
- $V_W = \max_i \min_j a_{ij} = \max\{2,2,3,1\} = 3$
- Следовательно максиминная стратегия игрока **А** - A_3.
- г) Построим матрицу рисков.
- $$P = \begin{bmatrix} 5 & 2 & \boxed{8} & 4 \\ 2 & 3 & 4 & \boxed{12} \\ \boxed{8} & \boxed{5} & 3 & 10 \\ 1 & 4 & 2 & 8 \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 & 8 \\ 6 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 7 & 1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

- Согласно критерию Сэвиджа определяем:
- $V_S = \min \max r_{ij} = \min\{8,6,5,7\} = 5$.

$$R = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 & \boxed{8} \\ \boxed{6} & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{5} & 2 \\ \boxed{7} & 1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

- В соответствии с этим критерием также наиболее предпочтительна стратегия A_3.

- д) Воспользуемся критерием Гурвица при при $\boldsymbol{\lambda} = 0,6$. Определим значение $V_H = max\,\{\boldsymbol{\lambda} min\ a_{ij} + (1-\boldsymbol{\lambda}) max\ a_{ij}\} =$ $= max\,\{0,6\ min\ a_{ij} + 0,4\ max\ a_{ij}\} =$ $= max\,\{0,6 \cdot 2 + 0,4 \cdot 8;\ \ 0,6 \cdot 2 + 0,4 \cdot 12;$ $0,6 \cdot 3 + 0,4 \cdot 10;\ 0,6 \cdot 1 + 0,4 \cdot 8\} = max\,\{4,4;$ $6,0;\ 5,8;\ 3,8\} = 6,0$. Таким образом, согласно критерию Гурвица оптимальной является стратегия A_2.
- Анализ результатов проведенных на основе различных критериев исследований показывает, что доминирующей является стратегия A_3.