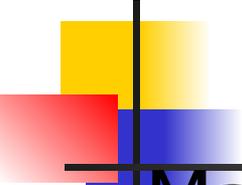




Финансовые вычисления по сложным процентам

(продолжение)



Основные вопросы

- Математическое дисконтирование по сложной ставке процента
- Непрерывное наращение и дисконтирование
- Банковский учет по сложным процентам
- Наращение по сложной учетной ставке
- Номинальная и эффективная учетные ставки

Математическое дисконтирование по сложным процентам

- Для того чтобы определить, какую денежную сумму PV следует вложить под сложные проценты сегодня, чтобы получить в определенный момент в будущем заданную сумму FV , следует применить дисконтирование.
- Выразив из формулы $FV = PV(1+i)^n$ PV , получим формулу математического дисконтирования:

$$PV = \frac{FV}{(1+i)^n}$$

$\frac{1}{(1+i)^n}$ - дисконтный множитель.

Математическое дисконтирование по сложным процентам

- Если проценты начисляются m раз в году, то современная стоимость денежной суммы FV определяется по формуле:

$$PV = \frac{FV}{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn}}$$

Здесь PV - современная величина (современная стоимость) денежной суммы FV .

Пример

- Сумма 500 000 рублей будет выплачена через 5 лет. Определите ее современную стоимость при условии, что применяется ставка сложных процентов 12% годовых.
- Решение: *$FV = 500\,000$ рублей;*
 $n = 5$ лет; $i = 0,12$.

$$PV = \frac{FV}{(1+i)^n} = \frac{500000}{(1+0,12)^5} =$$
$$= \frac{500000}{1,76234} = 283713,7 \text{ рубля.}$$

Непрерывное наращение и дисконтирование

При начислении процентов m раз в году по ставке i/m эффективная годовая ставка

$$f = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m - 1.$$

Таким образом, за год денежная

сумма увеличится в $\left(1 + \frac{i}{m}\right)^m$ раз.

При все более частом наращении процентов, т.е. при $m \rightarrow \infty$, используя второй замечательный предел, получим следующее:

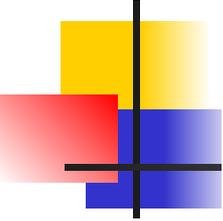
где e – число Эйлера (основание
натурального логарифма), $\frac{m}{i} \cdot i$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{i}{m} \right)^{\frac{m}{i} \cdot i} =$$

$$= \left[\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{i}{m} \right)^{\frac{m}{i}} \right]^i = e^i,$$

где e – число Эйлера (основание
натурального логарифма), $e \approx 2,718$.

Непрерывное наращение

- 
- **Непрерывным наращением** суммы PV по ставке i называется ее увеличение в e^i раз за один год или в e^{in} раз за n лет.
 - Процентную ставку, применяемую при непрерывном начислении процентов, называют **сила роста** и обозначают δ . Сила роста характеризует относительный прирост наращенной суммы за бесконечно малый промежуток времени.

- 
- В общем случае, формула непрерывного наращенния процентов имеет вид:
-

- $$FV = PV \cdot e^{in}$$
- Для того чтобы отличить непрерывную ставку от дискретной, вводят обозначение силы роста δ . Тогда формула непрерывного начисления процентов примет вид: $FV = PV \cdot e^{\delta \cdot n}$
- Эта формула верна и для случая, когда n не является целым числом.

Пример

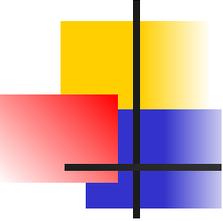
- На сумму 10 000 рублей начисляются проценты по ставке 8% годовых. Определите наращенную сумму через 3,5 года.

- Решение:

$$PV = 10000 \text{ руб.}; \delta = 0,08; n = 3,5 \text{ года.}$$

$$FV = PV \cdot e^{\delta \cdot n} = 10000 \cdot e^{0,08 \cdot 3,5} = \\ = 10000 \cdot 1,32313 = 13231,3 \text{ руб.}$$

Непрерывное дисконтирование

- 
- Используя формулу $FV = PV \cdot e^{\delta \cdot n}$, можно получить формулу непрерывного дисконтирования: $PV = FV \cdot e^{-\delta \cdot n}$
 - Пример
 - Какую сумму следует поместить на банковский депозит, чтобы через 5 лет получить 300 000 рублей, если проценты начисляются непрерывно по ставке 8%?
 - Решение: $FV = 300000$ руб.; $\delta = 0,08$; $n = 5$ лет.

$$PV = FV \cdot e^{-\delta \cdot n} = 300000 \cdot e^{-0,08 \cdot 5} = 300000 \cdot e^{-0,4} = \\ = 300000 \cdot 0,670320 = 201096 \text{ рублей}$$

Банковское дисконтирование (учет) по сложной учетной ставке

- В практике учетных операций иногда применяют **сложную учетную ставку**. В этих случаях каждый раз учетная ставка применяется не к первоначальной сумме как при простой учетной ставке, а к сумме, уже дисконтированной на предыдущем этапе.
- Пусть долговое обязательство на сумму FV со сроком погашения через n лет учитывается раньше срока по сложной годовой учетной ставке d .

- 
- Если учет осуществляется за год до срока, то начисляются проценты в сумме $FV \cdot d$. В этом случае владелец векселя получит сумму

- $FV - FV \cdot d = FV(1-d);$

За 2 года до срока – проценты начисляются на сумму $FV(1-d)$, дисконтированную на первом этапе. Тогда владелец векселя получит сумму, равную:

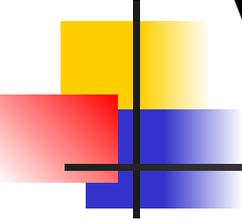
$$\begin{aligned} FV(1-d) - FV \cdot (1-d) \cdot d &= \\ = FV(1-2d+d^2) &= FV(1-d)^2 \end{aligned}$$

.....

За n лет до срока владелец векселя получит сумму:

$$FV(1-d)^n$$

Формула дисконтирования по сложной учетной ставке:



$$PV = FV(1 - d)^n$$

- где d – сложная годовая учетная ставка;
- $(1 - d)^n$ - дисконтный множитель.
- Если дисконтирование производится по учетной ставке m раз в году, то применяется формула:

$$PV = FV \left(1 - \frac{d}{m} \right)^{mn} .$$

Пример

- Ценная бумага на сумму 500 000 рублей, учтена за 3 года до срока погашения по сложной учетной ставке 15% годовых. Какова сумма дисконта?
- Решение: $FV = 500000 \text{ руб.}; n = 3 \text{ года}; d = 0,15.$

$$PV = FV(1 - d)^n = 500000 \cdot (1 - 0,15)^3 = \\ = 500000 \cdot 0,614125 = 307006,5 \text{ рублей}$$

получит при учете ценной бумаги ее владелец.

- Дисконт составит $D = 500\ 000 - 307\ 006,5 =$
- $= 192\ 993,5 \text{ руб.}$

Пример

- В условиях предыдущего примера рассчитайте сумму, которую получит владелец ценной бумаги при поквартальном дисконтировании.
- Решение: $FV = 500000 \text{ руб.}; n = 3 \text{ года}; d = 0,15; m = 4.$

$$PV = FV \left(1 - \frac{d}{m}\right)^{mn} = 500000 \left(1 - \frac{0,15}{4}\right)^{3 \cdot 4} =$$

$$= 500000 \cdot 0,63213 = 316065 \text{ руб.}$$

- Сравнение результатов свидетельствует о том, что для банка более частое дисконтирование не выгодно, так как при этом увеличивается сумма, выдаваемая владельцу ценной бумаги при ее досрочном учете.

Наращение по сложной учетной ставке

- Выразив FV из формулы $PV = FV(1-d)^n$, получим формулу наращенной суммы по сложной учетной ставке:

$$FV = \frac{PV}{(1-d)^n}$$

При наращении сложных процентов m раз в год:

$$FV = \frac{PV}{\left(1 - \frac{d}{m}\right)^{m \cdot n}}$$

Пример

- Кредит в размере 350000 рублей выдан на 2,5 года. По условиям договора начисление процентов производится по сложной учетной ставке 12% годовых. Определите наращенную сумму, если проценты начисляются:
 - а) ежегодно;
 - б) по полугодиям.

$$PV = 350000 \text{ руб.}; n = 2,5 \text{ года}; d = 0,12; \text{ а) } m = 1; \text{ б) } m = 2.$$

$$\text{а) } FV = \frac{PV}{(1-d)^n} = \frac{350000}{(1-0,12)^{2,5}} = \frac{350000}{0,726452} = 481793,7 \text{ рублей};$$

$$\text{б) } FV = \frac{PV}{\left(1 - \frac{d}{m}\right)^{m \cdot n}} = \frac{350000}{\left(1 - \frac{0,12}{2}\right)^{2 \cdot 2,5}} = \frac{350000}{0,733904} = 476901,6 \text{ рублей}$$

Номинальная и эффективная учетные ставки

- Номинальная учетная ставка d используется в контрактах. Эффективная учетная ставка f характеризует фактическое дисконтирование за год. Ее можно определить из равенства:

$$1 - f = \left(1 - \frac{d}{m}\right)^m, \quad \text{тогда}$$

$$f = 1 - \left(1 - \frac{d}{m}\right)^m$$

Для одних и тех же условий эффективная учетная ставка меньше номинальной.

Пример

- Ценная бумага на сумму 500000 рублей, срок платежа по которой наступает через 3 года, продана с дисконтом по номинальной учетной ставке 12% при ежемесячном дисконтировании. Определите сумму дисконта и эффективную учетную ставку.

- Решение: $FV = 500000$ руб.; $n = 3$ года; $d = 0,12$; $m = 12$.

$$PV = 500000 \left(1 - \frac{0,12}{12} \right)^{12 \cdot 3} = 500000 \cdot 0,696413 = 348206,5 \text{ рублей}$$

$$D = 500000 - 348206,5 = 151793,5 \text{ рублей}$$

- $f = 1 - \left(1 - \frac{0,12}{12} \right)^{12} = 0,1136$ то есть 11,36%.