# Финансовые вычисления по сложным процентам

(продолжение)

# Основные вопросы

- Математическое дисконтирование по сложной ставке процента
- Непрерывное  наращение и дисконтирование
- Банковский учет по сложным процентам
- Наращение по сложной учетной ставке
- Номинальная и эффективная учетные ставки

# Математическое дисконтирование по сложным процентам

- Для того чтобы определить, какую денежную сумму *PV* следует вложить под сложные проценты сегодня, чтобы получить в определенный момент в будущем заданную сумму *FV* , следует применить дисконтирование.
- Выразив из формулы $FV = PV(1+i)^n$ PV, получим формулу математического дисконтирования:

$$PV = \frac{FV}{(1+i)^n}$$

$\frac{1}{(1+i)^n}$ - дисконтный множитель.

# Математическое дисконтирование по сложным процентам

- Если проценты начисляются *m* раз в году, то современная стоимость денежной суммы *FV* определяется по формуле:

$$PV = \frac{FV}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn}}$$

Здесь *PV* - современная величина (современная стоимость) денежной суммы *FV*.

# Пример

- Сумма 500 000 рублей будет выплачена через 5 лет. Определите ее современную стоимость при условии, что применяется ставка сложных процентов 12% годовых.
- Решение: *FV = 500 000 рублей;*

*n = 5 лет;     i = 0,12.*

$$PV = \frac{FV}{(1+i)^n} = \frac{500000}{(1+0{,}12)^5} =$$

$$= \frac{500000}{1{,}76234} = 283713{,}7\,\textit{рубля}.$$

# Непрерывное наращение и дисконтирование

- При начислении процентов *m* раз в году по ставке *i/m* эффективная годовая ставка

$$f = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m - 1.$$

Таким образом, за год денежная

сумма увеличится в $\left(1 + \frac{i}{m}\right)^m$ раз.

При все более частом наращении процентов, т.е. при $m \to \infty$, используя второй замечательный предел, получим следующее:

где е – число Эйлера (основание натурального логарифма),

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m} = \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{i}\cdot i} =$$

$$= \left[\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{i}}\right]^{i} = e^{i},$$

где е – число Эйлера (основание натурального логарифма), $e \approx 2{,}718.$

# Непрерывное наращение

- **Непрерывным наращением** суммы *PV* по ставке *i* называется ее увеличение в $e^{i}$ раз за один год или в $e^{in}$ раз за *n* лет.
- Процентную ставку, применяемую при непрерывном начислении процентов, называют **сила роста** и обозначают $\delta$. Сила роста характеризует относительный прирост наращенной суммы за бесконечно малый промежуток времени.

- В общем случае, формула непрерывного наращения процентов имеет вид:
- $$FV = PV \cdot e^{in}$$
- Для того чтобы отличить непрерывную ставку от дискретной, вводят обозначение силы роста $\delta$. Тогда формула непрерывного начисления процентов примет вид: $FV = PV \cdot e^{\delta \cdot n}$
- Эта формула верна и для случая, когда *n* не является целым числом.

# Пример

- На сумму 10 000 рублей начисляются проценты по ставке 8% годовых. Определите наращенную сумму через 3,5 года.
- Решение:

$$PV = 10000 \quad руб.; \delta = 0{,}08; n = 3{,}5 \quad года.$$

$$FV = PV \cdot e^{\delta \cdot \ n} = 10000 \cdot e^{0{,}08 \cdot 3{,}5} =$$

$$= 10000 \cdot 1{,}32313 = 13231{,}3\, руб.$$

# Непрерывное дисконтирование

- Используя формулу $FV = PV \cdot e^{\delta \cdot n}$, можно получить формулу непрерывного дисконтирования: $$PV = FV \cdot e^{-\delta \cdot n}$$
- Пример
- Какую сумму следует поместить на банковский депозит, чтобы через 5 лет получить 300 000 рублей, если проценты начисляются непрерывно по ставке 8%?
- Решение: $FV = 300000 \quad руб.; \delta = 0{,}08; n = 5 \quad лет.$

$$PV = FV \cdot e^{-\delta \cdot n} = 300000 \cdot e^{-0{,}08 \cdot 5} = 300000 \cdot e^{-0{,}4} =$$

$$= 300000 \cdot 0{,}670320 = 201096\, рублей$$

# Банковское дисконтирование (учет) по сложной учетной ставке

- В практике учетных операций иногда применяют сложную учетную ставку. В этих случаях каждый раз учетная ставка применяется не к первоначальной сумме как при простой учетной ставке, а к сумме, уже дисконтированной на предыдущем этапе.
- Пусть долговое обязательство на сумму *FV* со сроком погашения через *n* лет учитывается раньше срока по сложной годовой учетной ставке *d*.

- Если учет осуществляется за год до срока, то начисляются проценты в сумме *FV·d*. В этом случае владелец векселя получит сумму
- *FV - FV·d= FV(1-d);*

За 2 года до срока – проценты начисляются на сумму *FV(1-d),* дисконтированную на первом этапе. Тогда владелец векселя получит сумму, равную:

$$FV(1-d) - FV \cdot (1-d) \cdot d =$$

$$= FV(1-2d+d^2) = FV(1-d)^2$$

.................................................................................

За *n* лет до срока владелец векселя получит сумму:

$$FV(1-d)^n$$

# Формула дисконтирования по сложной учетной ставке:

$$PV = FV(1-d)^n$$

- где $d$ – сложная годовая учетная ставка;
- $(1-d)^n$ - дисконтный множитель.
- Если дисконтирование производится по учетной ставке $m$ раз в году, то применяется формула:

$$PV = FV\left(1-\frac{d}{m}\right)^{mn}.$$

# Пример

- Ценная бумага на сумму 500 000 рублей, учтена за 3 года до срока погашения по сложной учетной ставке 15% годовых. Какова сумма дисконта?
- Решение: $FV = 500000\, руб.; n = 3 \quad года; d = 0{,}15.$

$$PV = FV\left(1-d\right)^n = 500000 \cdot (1-0{,}15)^3 =$$

$$= 500000 \cdot 0{,}614125 = 307006{,}5\, рублей$$

получит при учете ценной бумаги ее владелец.

- Дисконт составит *D= 500 000 - 307 006,5=*
- *=192 993,5 руб.*

# Пример

- В условиях предыдущего примера рассчитайте сумму, которую получит владелец ценной бумаги при поквартальном дисконтировании.
- Решение: $FV = 500000\,руб.; n = 3 \quad года; d = 0{,}15; m = 4.$

$$PV = FV\left(1 - \frac{d}{m}\right)^{mn} = 500000\left(1 - \frac{0{,}15}{4}\right)^{3\cdot 4} =$$

$$= 500000 \cdot 0{,}63213 = 316065\,руб.$$

- Сравнение результатов свидетельствует о том, что для банка более частое дисконтирование не выгодно, так как при этом увеличивается сумма, выдаваемая владельцу ценной бумаги при ее досрочном учете.

# Наращение по сложной учетной ставке

- Выразив *FV* из формулы $PV = FV(1-d)^n$, получим формулу наращения по сложной учетной ставке:

$$FV = \frac{PV}{(1-d)^n}$$

При наращении сложных процентов m раз в год:

$$FV = \frac{PV}{\left(1-\frac{d}{m}\right)^{m\cdot n}}$$

# Пример

- Кредит в размере 350000 рублей выдан на 2,5 года. По условиям договора начисление процентов производится по сложной учетной ставке 12% годовых. Определите наращенную сумму, если проценты начисляются:
- а) ежегодно;
- б) по полугодиям.

$$PV = 350000\,руб.;\, n = 2{,}5\quad года;\, d = 0{,}12;\quad а)\, m = 1;\quad б)\, m = 2.$$

$$а)\, FV = \frac{PV}{(1-d)^n} = \frac{350000}{(1-0{,}12)^{2{,}5}} = \frac{350000}{0{,}726452} = 481793{,}7\, рублей;$$

$$б)\, FV = \frac{PV}{\left(1-\frac{d}{m}\right)^{m\cdot n}} = \frac{350000}{\left(1-\frac{0{,}12}{2}\right)^{2\cdot 2{,}5}} = \frac{350000}{0{,}733904} = 476901{,}6\, рублей$$

# Номинальная и эффективная учетные ставки

- Номинальная учетная ставка *d* используется в контрактах. Эффективная учетная ставка *f* характеризует фактическое дисконтирование за год. Ее можно определить из равенства:

$$1 - f = \left(1 - \frac{d}{m}\right)^m, \quad \text{тогда}$$

$$f = 1 - \left(1 - \frac{d}{m}\right)^m$$

Для одних и тех же условий эффективная учетная ставка меньше номинальной.

# Пример

- Ценная бумага на сумму 500000 рублей, срок платежа по которой наступает через 3 года, продана с дисконтом по номинальной учетной ставке 12% при помесячном дисконтировании. Определите сумму дисконта и эффективную учетную ставку.
- Решение: $FV = 500000\,руб.;\, n = 3 \quad года;\, d = 0{,}12;\, m = 12.$

$$PV = 500000\left(1 - \frac{0{,}12}{12}\right)^{12\cdot 3} = 500000 \cdot 0{,}696413 = 348206{,}5\,рублей$$

$$D = 500000 - 348206{,}5 = 151793{,}5\,рублей$$

- $f = 1 - \left(1 - \frac{0{,}12}{12}\right)^{12} = 0{,}1136$ то есть 11,36%.