Финансовые вычисления по простым и сложным процентам

Основные вопросы

Финансовая эквивалентность обязательств
Замена и консолидация платежей
Оценка доходности финансовых операций
Учет инфляции при оценке результатов финансовых операций
Покупательная способность денег
Реально наращенная сумма денег при наличии инфляции
Нетто-ставка (реальная ставка процентов)
Учет инфляции при определении процентной ставки

Финансовая эквивалентность обязательств

- В финансовой практике часто возникают ситуации, когда необходимо заменить одно обязательство другим, например с более отдаленным сроком платежа, досрочно погасить задолженность, объединить несколько платежей в один, изменить схему начисления процентов и т.п. В таких случаях возникает вопрос о том, на каких принципах должно основываться изменение контракта.
- На практике в качестве такого принципа наиболее часто применяется *принцип финансовой эквивалентности обязательств*, позволяющий сохранить баланс интересов сторон контракта. Этот принцип предполагает неизменность финансовых отношений до и после изменения условий контракта.

Эквивалентность платежей

- При изменении условий платежей для реализации названного принципа необходимо учитывать разновременность платежей, которые производятся в ходе выполнения условий контракта до и после его изменения.
- *Эквивалентными* считаются такие *платежи*, которые оказываются равными после их приведения по заданной процентной ставке к одному моменту времени, либо после приведения одного из них к моменту наступления другого по заданной процентной ставке.

Пример

- Выясните, являются ли эквивалентными два обязательства, если по одному из них должно быть выплачено 2 млн. рублей через 2 года, а по второму – 2,5 млн. рублей через 3 года. Для сравнения применить сложную процентную ставку 15% годовых.
- Решение:

$$FV_1 = 2000000\,руб.;\, n_1 = 2года;\, FV_2 = 2500000\,руб.;\, n_2 = 3года,\, i = 0{,}15.$$

Найдем современную стоимость этих платежей.

$$PV_1 = \frac{2000000}{(1+0{,}15)^2} = \frac{2000000}{1{,}3225} = 1512287{,}33\,руб.$$

$$PV_2 = \frac{2500000}{(1+0{,}15)^3} = \frac{2500000}{1{,}520875} = 1643790{,}58\,руб.$$

Замена и консолидация платежей

- *Принцип финансовой эквивалентности обязательств* осуществляется *методом приведения* платежей к одному моменту времени с помощью операций наращения и дисконтирования.
- При применении метода приведения следует, прежде всего, выбрать *базовый момент времени*, т.е. момент к которому предполагается приведение всех сумм в расчете.

- Дисконтирование применяется, если необходимо привести платежи к более ранней дате, наращение - когда базовый момент времени относится к будущему.
- Уравнение эквивалентности:

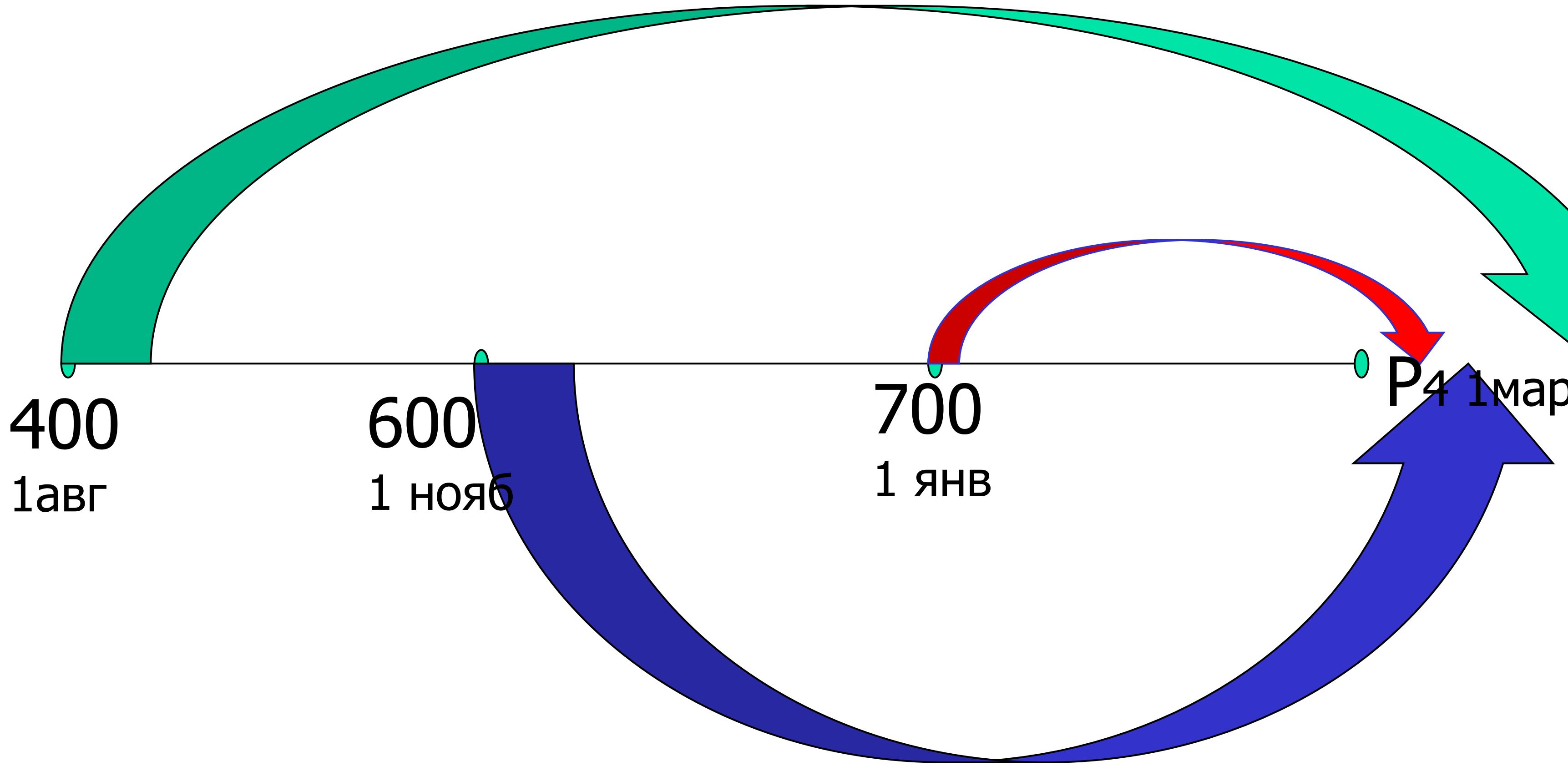
Сумма заменяемых платежей, приведенных к одному моменту времени, приравнивается к сумме платежей по новому соглашению, приведенных к тому же моменту времени.

Пример

- Имеются два кредитных обязательства 400 тыс. руб. и 700 тыс. руб. со сроками уплаты 1 августа и 1 января (следующего года). По согласованию сторон условия обязательств пересмотрены: первый платеж в размере 600 тыс. рублей должник вносит 1 ноября, остальной долг он выплачивает 1 марта. Определите величину второго платежа, если в расчетах используется простая процентная ставка 20% годовых. Проценты точные.

Схема приведения платежей к одному моменту времени

- За базовую дату примем дату искомого платежа. Все остальные платежи приведем к этой дате – 1 марта



- Решение:
- Срок от 1 августа (P_1=400 тыс. руб.) до 1 марта составляет 212 дней (365-213+60).
- Срок от 1 января (P_2=700 тыс. руб.) до 1 марта составляет 59 дней (60-1).
- Срок от 1 ноября (P_3 =600 тыс. руб.) до 1 марта составляет 120 дней (365-305+60).
- Уравнение эквивалентности:

$$400 \cdot \left(1 + \frac{212}{365} \cdot 0{,}2\right) + 700 \cdot \left(1 + \frac{59}{365} \cdot 0{,}2\right) =$$

$$= 600 \cdot \left(1 + \frac{120}{365} \cdot 0{,}2\right) + P_4.$$

$$446{,}47 + 722{,}63 = 639{,}45 + P_4,$$

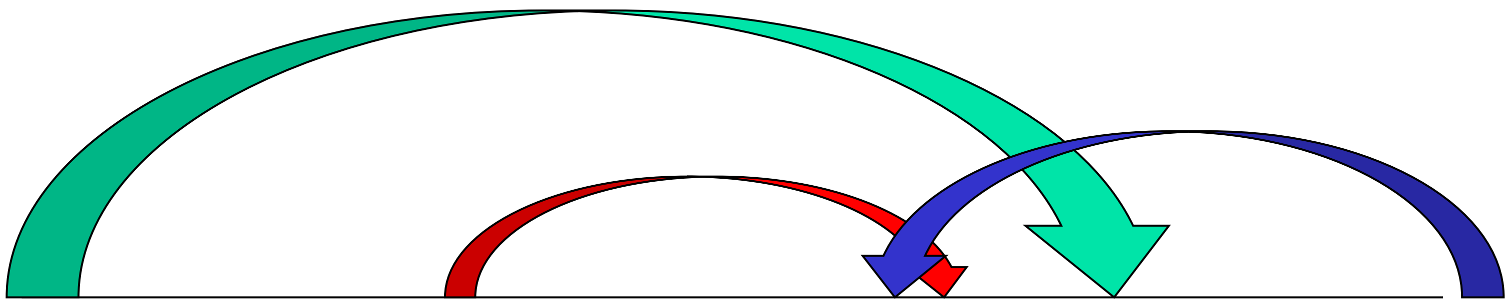
P_4=529,65 тыс. руб.

Пример

- Согласно контракту предприятие должно выплатить 200, 300 и 500 тыс. рублей соответственно через 1,5 года, 2 и 4 года. Предприятие предлагает пересмотреть контракт и вернуть долг одним платежом через 3,5 года. Найдите величину консолидированного платежа, если применяется сложная процентная ставка 18% годовых.

- За базовую дату примем дату консолидированного платежа. Все остальные платежи приведем к этой дате.

Схема консолидации платежей



- 200 300 P_4 500

  1,5г. 2 г. 3,5 г. 4 г.

Решение:

$$P_1 = 200 тыс.руб.; P_2 = 300 тыс.руб.;$$

$$P_3 = 500 тыс.руб.; i = 0{,}18; n_1 = 1{,}5 года;$$

$$n_2 = 2 года; n_3 = 4 года; n_4 = 3{,}5 года.$$

$$P_4 = 200 \cdot (1 + 0{,}18)^{3,5-1,5} + 300 \cdot (1 + 0{,}18)^{3,5-2} +$$

$$+ \frac{500}{(1 + 0{,}18)^{4-3,5}} = 278{,}48 + 384{,}54 + 460{,}29 =$$

$$= 1123{,}31 тыс.руб.$$

Оценка доходности финансовых операций

Результат финансовой операции оценивается с помощью показателей:

а) дохода или прибыли;

б) годовой ставки простых процентов :

$$i = \frac{FV - PV}{PV \cdot n}$$

в)годовой ставки сложных процентов :

$$i = \sqrt[n]{\frac{FV}{PV}} - 1$$

г) эффективной ставки процентов:

$$f = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m - 1$$

Пример

- Ссуда в размере 2,5 млн. рублей выдана под простые проценты на 2 года с условием возвратить в конце срока 3,5 млн. рублей. Определить доходность этой операции на основе простой процентной ставки.
- Решение: *FV= 3,5 млн. рублей; PV =2,5 млн. рублей; n= 2года*.

$$i = \frac{FV - PV}{PV \cdot n} = \frac{3{,}5 - 2{,}5}{2{,}5 \cdot 2} = 0{,}2$$

или 20%

Пример

- На вклад, помещенный в банк под 16% годовых, проценты начисляются ежеквартально. Оцените доходность этой операции на основе эффективной процентной ставки.
- Решение: *i=0,16; m=4.*

$$f = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m - 1 = \left(1 + \frac{0,16}{4}\right)^4 - 1 =$$

$$= 0,1699 \text{ или } 16,99\%.$$

Пример

- Ссуда 100 тыс. рублей выдана на 240 дней под 12% годовых. (Проценты простые обыкновенные). При выдаче ссуды удержаны комиссионные в размере 1 тыс. рублей. Определить полную доходность финансовой операции в виде сложной процентной ставки.

Решение:

- *PV=100 тыс. руб.; t = 240 дней; Y = 360 дней;*
- Затраты составили *PV_1=99 тыс. руб. (100 – 1).*

$$FV = PV \cdot \left(1 + \frac{t}{Y} \cdot i\right) = 100 \cdot \left(1 + \frac{240}{360} \cdot 0{,}12\right) = 108 \text{тыс.руб.}$$

- Полная доходность финансовой операции:

$$i = \sqrt[n]{\frac{FV}{PV_1}} - 1 = \sqrt[\frac{240}{360}]{\frac{108}{99}} - 1 =$$

$$= \left(\frac{108}{99}\right)^{\frac{360}{240}} - 1 = 1{,}0909^{1,5} - 1 = 0{,}1394$$

Учет инфляции при оценке результатов финансовых операций

- Инфляция возникает в результате изменения баланса между денежной массой и объемом созданных в стране благ и услуг.
- В результате повышается общий уровень цен в экономике, что влечет к снижению покупательной способности денег.
- Поскольку инфляционные процессы оказывают значительное влияние на реальную доходность финансовых операций, необходимо учитывать их влияние в финансовых вычислениях.

- В связи с этим наряду с номинальной процентной ставкой, оценивающей доходность финансовой операции без поправки на инфляцию, следует определять реальную процентную ставку.
- Последняя позволяет оценить доходность с учетом инфляции, характеризующейся снижением покупательной способности денег.

Покупательная способность денег

- Падение покупательной способности денег за период характеризуется с помощью индекса покупательной способности.
- Этот индекс принимают равным обратной величине индекса цен за тот же период:
- $i_{п.с.} = 1/ i_{ц.}$

Реально наращенная сумма денег: $S = FV \cdot i_{п.с.}$

- Пример

  Цены на товары и услуги в отчетном периоде возросли на 5%. Как изменилась покупательная способность денег?

Решение: $i_{ц.}$=1+0,05=1,05,

тогда $i_{п.с.}$= 1/ 1,05=0,95 или 95%

Пример

- Два вклада в размере 100000 руб. были размещены на три года под 12% годовых. Причем один вклад был размещен под простые проценты, а другой – под сложные. За этот период (3 года) цены на товары и услуги вследствие инфляции выросли на 30%. Определите реальные наращенные суммы по каждому из вкладов.

Решение:

$$PV = 100000\, руб.;\, i = 0{,}12;\, n = 3 года;\, i_ц = 1{,}3 \quad (1 + 0{,}3).$$

- 1. Номинально наращенные суммы денег:
- а) по простым процентам:

$$FV_1 = PV(1 + ni) =$$

$$= 100000(1 + 3 \cdot 0{,}12) = 136000\, руб.$$

б) по сложным процентам:

$$FV_2 = PV(1 + i)^n = 100000 \cdot 1{,}12^3 =$$

$$= 100000 \cdot 1{,}40493 = 140493\, руб.$$

2. Индекс покупательной способности:

$$i_{ц} = 1 + 0,3; i_{п.с.} = \frac{1}{1,3} = 0,77$$

3. Реально наращенные суммы денег:

$$S_1 = FV_1 \cdot i_{п.с.} = 136000 \cdot 0,77 = 104720\, руб.;$$

$$S_2 = FV_2 \cdot i_{п.с.} = 140493 \cdot 0,77 = 108180\, руб.$$

- 4.Оценим реальную доходность финансовых операций с помощью реальной сложной процентной ставки по формуле:
- $$i = \sqrt[n]{\frac{S}{PV}} - 1.$$
- Тогда $$i_1 = \sqrt[3]{\frac{104720}{100000}} - 1 = 0{,}01549;$$

$$i_2 = \sqrt[3]{\frac{108180}{100000}} - 1 = 0{,}02656.$$

Таким образом, реальная доходность составила 1,55% и 2,66% соответственно.

Реально наращенная сумма денег при наличии инфляции

- Наращение по простым процентам:

$$S = PV \cdot \frac{(1+ni)}{(1+\gamma)^n}$$

- Наращение по сложным процентам:

$$S = PV \cdot \left(\frac{1+i}{1+\gamma}\right)^n$$

.

- Здесь - *PV* первоначальная сумма денег, размещенная на вкладе;

  i - годовая ставка процента по вкладу;

  γ - средний годовой темп инфляции;

  n - срок вклада.

Наращение в условиях инфляции

- При сравнении годовой ставки процента по вкладу и среднего годового темпа инфляции возможны три случая:
- 1). $i > \gamma$, тогда $S > PV$, т.е. только часть наращенной суммы, «поглощается» инфляцией. Это наиболее оптимальный результат.
- 2). $i = \gamma$, тогда $S = PV$, т.е. все наращение по вкладу «поглощено» инфляцией. Следовательно, роста реальной суммы нет.
- 3). $i < \gamma$, тогда $S < PV$. Т.е. инфляция «поглотила» все наращение и даже часть первоначальной суммы денег, размещенной на вкладе. Такое положение называют «эрозией капитала».

Пример

- Первоначальная сумма вклада составляет 6000 руб. Вклад размещен на 3 года под 4,5% годовых. В течение срока вклада ожидается средний годовой темп инфляции на уровне 7%. Требуется определить наращенную сумму денег с учетом инфляции.
- Решение: $PV = 6000\, руб.; n = 3 \quad года; i = 0{,}045; \gamma = 0{,}07.$

$$S = PV \cdot \left(\frac{1+i}{1+\gamma} \right)^n = 6000 \cdot \left(\frac{1+0{,}045}{1+0{,}07} \right)^3 = 6000 \cdot 0{,}93153 = 5589{,}2\, руб.$$

- Т.о. инфляция «поглотила» все наращения и даже часть первоначальной суммы вклада.

Пример

- Ежемесячный уровень инфляции составляет 7% (по отношению к предыдущему месяцу). Исчислить реально наращенную стоимость вклада в 200 тыс. руб., хранящуюся на счете до востребования в сбербанке в течение 7 месяцев по ставке 10% годовых. Проценты простые.
- Решение: *PV=200 тыс. руб.; t=7 мес.; Y= 12 мес.; i=0,1; γ=0,07; n= 7 раз*

$$S = PV\frac{\left(1+\frac{t}{Y}\cdot i\right)}{(1+\gamma)^n} = 200\frac{\left(1+\frac{7}{12}\cdot 0{,}1\right)}{(1+0{,}07)^7} = 200\cdot\frac{1{,}058333}{1{,}60578} = 131{,}1815 \quad \textit{тыс.руб.}$$

Нетто-ставка (реальная ставка процентов)

- Измеряет доходность с учетом инфляции, определяется из соотношения:

$$\left(1+i_\gamma\right)^n = \frac{\left(1+i\right)^n}{\left(1+\gamma\right)^n}$$

- Здесь i_γ – реальная ставка процентов (нетто-ставка).
- Следовательно, $1+i_\gamma = \dfrac{1+i}{1+\gamma};$
- Отсюда $(1+i_\gamma)(1+\gamma) = 1+i;$

- Раскроем скобки:

$$1 + i_\gamma + \gamma + i_\gamma \cdot \gamma = 1 + i;$$

- Сгруппируем: $(1+\gamma)i_\gamma = i - \gamma;$

- Выразим *iγ*:

$$i_\gamma = \frac{i - \gamma}{1 + \gamma}$$

- Здесь *iγ* – реальная ставка процентов (нетто-ставка).

Пример

- Определить целесообразность помещения средств на год под 20% годовых, если уровень инфляции составит 15%.
- Решение: *i = 0,2; γ = 0,15*

$$i_\gamma = \frac{i-\gamma}{1+\gamma} = \frac{0{,}2-0{,}15}{1+0{,}15} = \frac{0{,}05}{1{,}15} = 0{,}0435$$

- Реальная положительная ставка - 4,35%, т. е. реальный доход по операции будет 4,35% от каждой единицы вложенных средств, обесцененной за год на 13%: 1/1,15 = 0,87 или 87%   100-87=13%

Учет инфляции при определении процентной ставки

- Реальная ставка процентов $i_\gamma = \dfrac{i-\gamma}{1+\gamma}$

  При достаточно большой инфляции, когда $\gamma > i$, ставка может стать отрицательной.

  Ставка j, позволяющая компенсировать обесценивающее влияние инфляции, может быть определена из соотношения:

$$1 + j = (1 + i) \cdot (1 + \gamma),$$ следовательно

$$j = i + \gamma + i\gamma$$

Если i и γ малы, то

$$j = i + \gamma$$

Пример

- Кредит в 300000 рублей выдается на 2 года. Прогнозируемый уровень инфляции на этот период 8% в год. Проценты сложные. Какую процентную ставку должен назначить банк, чтобы обеспечить реальную доходность кредитной операции 10% годовых. Определите наращенную сумму долга.
- Решение: *PV= 300000 рублей; i=0,1; γ =0,08*

Процентная ставка: $j = i + \gamma + i\gamma = 0{,}1 + 0{,}08 + 0{,}1 \cdot 0{,}08 = 0{,}188$;

тогда $FV = 300000(1 + 0{,}188)^2 = 423403{,}2\, руб.$