



Финансовые ренты

Наращенная сумма годовой
ренты

Основные вопросы

- Потоки платежей. Основные понятия.
- Виды финансовых рент.
- Нарощенная стоимость годовой ренты постнумерандо.
- Нарощенная стоимость годовой ренты пренумерандо.
- Нарощенная сумма годовой ренты с начислением процентов m раз в год.
- Нарощенная величина p -срочной ренты.

Основные понятия

- **Поток финансовых платежей** - ряд следующих друг за другом выплат и поступлений.
- В **регулярных финансовых потоках** поступление средств осуществляется через равные промежутка времени.
- **Финансовые ренты** – это регулярные финансовые потоки.
- **Член ренты** – величина каждой отдельной выплаты.
- **Период ренты** – временной интервал между двумя платежами.
- **Срок ренты** – время от начала ренты до конца ее последнего периода.

Виды финансовых рент

- В зависимости от размера платежа различают ренты **постоянные** и **переменные**.
- Платежи производятся в начале процентного периода – **рента пренумерандо** (prenumerando).
- Платежи производятся в конце процентного периода – **рента постнумерандо** (postnumerando).
- **Ренты безусловные и условные**. Последние выплачиваются после наступления какого-либо события.
- **Ренты немедленные**, действие которых начинается сразу после заключения договора.
- **Ренты отложенные**, платежи по которым начинаются через некоторый оговоренный в контракте период.

Наращенная сумма годовой ренты постнумерандо.

- Начисление процентов и осуществление платежей производится один раз в год.
- R – суммарный годовой платеж.
- Наращенные платежи представляют собой геометрическую прогрессию с первым членом R и знаменателем прогрессии $(1+i)$. Найдем ее сумму:

$$FV_f^{post} = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

Наращенная сумма годовой ренты постнумерандо

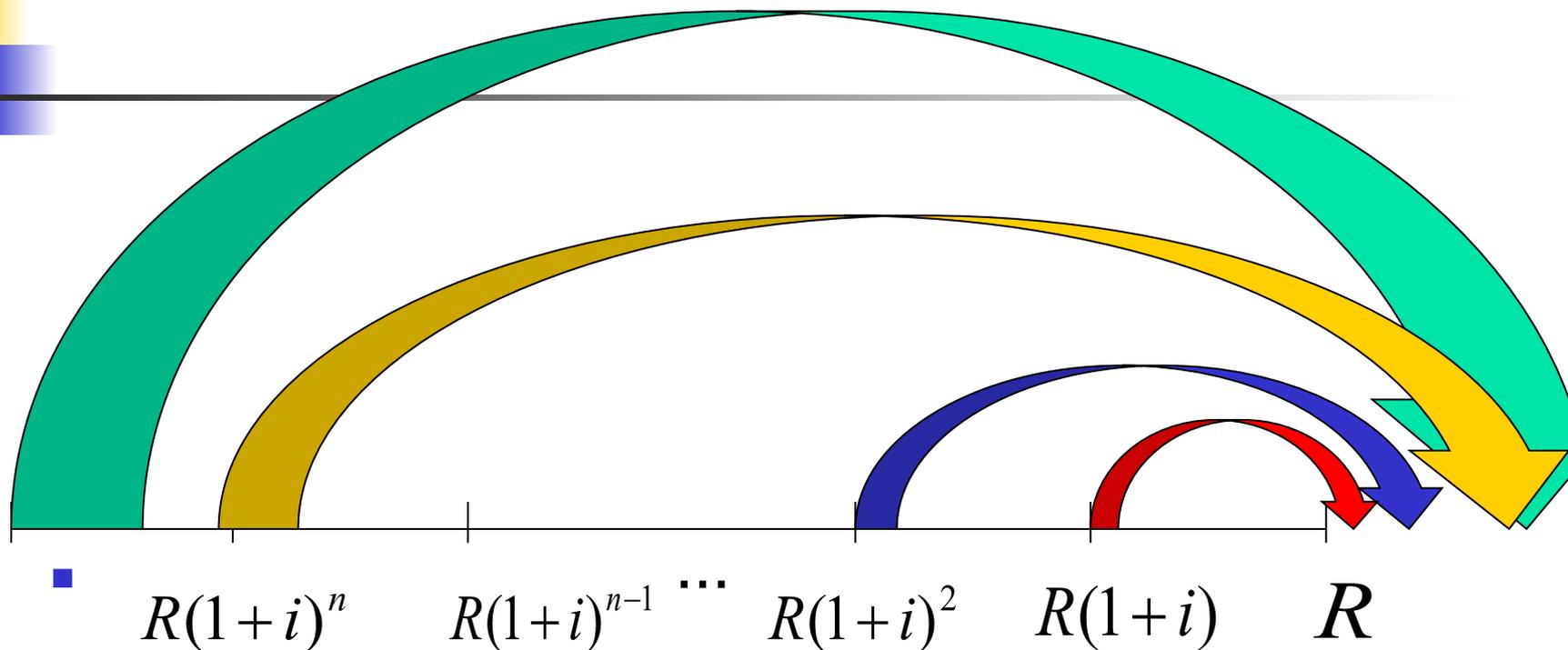
В формуле для определения наращенной суммы годовой ренты: $FV_f^{post} = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$,

выражение $f_{(n,i)} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$ называют

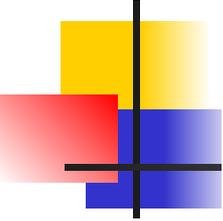
коэффициентом или **множителем наращения финансовой ренты**.

Он представляет собой будущую (наращенную) стоимость финансовой ренты, каждый член которой равен одной денежной единице.

Наращенная годовая рента постнумерандо



Наращенная сумма годовой ренты пренумерандо

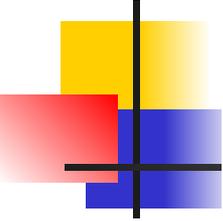
- 
- Число раз наращенного платежа на один раз больше, следовательно множитель наращенного платежа имеет вид:

$$f_{(n,i)} \cdot (1+i) = \frac{(1+i)^n - 1}{i} \cdot (1+i)$$

- Формула для определения наращенной суммы годовой ренты пренумерандо:

$$FV_f^{pre} = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} \cdot (1+i).$$

Пример

- 
- В течение четырех лет ежегодно в конце года на специальный счет поступает 50 тыс. руб. Определить, какая сумма будет на счете к концу срока при условии начисления сложных процентов по ставке 10%.
 - Решение:

$R=50$ тыс. руб.; $n=4$ года; $i=0,1$.

$$FV_f^{post} = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} = 50 \cdot \frac{(1+0,1)^4 - 1}{0,1} =$$
$$= 50 \cdot 4,641 = 232,05 \text{ тыс. руб.}$$

Пример

- Создается целевой фонд для обеспечения инвестиций в сумме 10 млн. руб. сроком на 5 лет. Сложные проценты начисляются по ставке 20% годовых. Определите размер ежегодного платежа.
- Решение: $FV_f^{pre} = 10 \text{ млн. руб.}; n = 5; i = 0,2.$

$$FV_f^{pre} = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} \cdot (1+i); \quad 10 = R \cdot \frac{1,2^5 - 1}{0,2} \cdot 1,2;$$

- Отсюда $8,93 \cdot R = 10$, следовательно $R = 10/8,93 = 1,1198$ млн. руб.

Наращенная сумма годовой ренты с начислением процентов m в раз в год

- Начисление процентов производится m раз в год, то есть за весь срок ренты $m \cdot n$ раз
- R – суммарный годовой платеж.
- Наращенные платежи представляют собой геометрическую прогрессию с первым членом R и знаменателем прогрессии $\left(1 + \frac{i}{m}\right)^m$
- Найдем ее сумму:

$$FV_f^{post} = R \cdot \frac{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn} - 1}{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^m - 1}.$$

Пример

- На банковский счет ежегодно в конце года поступает 10 000 рублей в течение 7 лет. На эти средства ежеквартально начисляют проценты по номинальной ставке 15% годовых. Определите, какая сумма будет на банковском счете к концу срока.
- Решение: *$R=10\ 000$ руб.; $m=4$ раза в год; $n=7$ лет; $i=0,15$.*

$$FV_f^{post} = R \cdot \frac{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn} - 1}{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^m - 1} = 10000 \cdot \frac{\left(1 + \frac{0,15}{4}\right)^{4 \cdot 7} - 1}{\left(1 + \frac{0,15}{4}\right)^4 - 1} =$$
$$= 10000 \cdot 11,366392 = 113663,92 \text{ руб.}$$

Наращенная сумма годовой ренты с p платежами в году и начислением процентов

m в раз в год

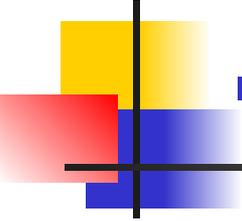
Размер годового платежа R ;

- n - число лет;
- i - ставка за год;
- p – число платежей в год;
- m – количество начислений процентов.

■ Тогда платеж за период равен R/p . Число процентных периодов $m \cdot n$. Наращение производится каждый раз по ставке i/m .

■ Наращенные платежи представляют собой геометрическую прогрессию с первым членом R/p и знаменателем прогрессии

$$\left(1 + \frac{i}{m} \right)^{\frac{m}{p}}$$

- 
- Количество членов ренты равно $p \cdot n$.
 - Найдем ее сумму:

$$FV_f^{post} = \frac{R}{p} \cdot \frac{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn} - 1}{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}.$$

- Для ренты пренумерандо:

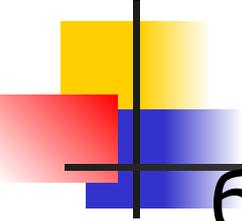
$$FV_f^{pre} = \frac{R}{p} \cdot \frac{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn} - 1}{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1} \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right).$$

Пример

- Страховая компания принимает платежи по полугодиям равными частями по 250 тыс. руб. в течение 3 лет. Банк, обслуживающий компанию, начисляет проценты ежеквартально из расчета 10% годовых. Определите, какую сумму получит страховая компания по истечению срока договора.
- Решение: $R/p = 250$ тыс. руб.; $R = 500$ тыс.руб.; $i=0,1$; $p=2$ раза; $m=4$ раза; $n=3$ года.

$$FV_f = \frac{R}{p} \cdot \frac{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn} - 1}{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1} = 250 \cdot \frac{\left(1 + \frac{0,1}{4}\right)^{4 \cdot 3} - 1}{\left(1 + \frac{0,1}{4}\right)^{\frac{4}{2}} - 1} =$$
$$= 250 \cdot \frac{0,344}{0,0506} = 250 \cdot 6,798 = 1699,5 \text{ тыс.руб.}$$

Пример



Для обеспечения некоторых будущих расходов создается фонд средств, в который поступают платежи в виде постоянной годовой ренты постнумерандо в течение 5 лет. Размер годового платежа 4 млн. руб. На поступившие взносы начисляются проценты по ставке $18,5\%$ годовых. Найти величину фонда на конец срока, если:

Пример (продолжение)

- 1) проценты начисляются и платежи производятся один раз в год ($m=p=1$). Рента постнумерандо.
- Решение:
- $R=4$ млн.руб.; $i=0,185$; $n=5$ лет.

$$FV_f^{post} = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} = 4 \cdot \frac{(1+0,185)^5 - 1}{0,185} = 28,90 \text{ млн.руб.}$$

Пример (продолжение)

- 2) проценты начисляются поквартально, платежи осуществляются один раз в год ($m=4, p=1$).
- Решение:
- $R=4$ млн.руб.; $i=0,185$; $n=5$ лет.

$$FV_f^{post} = \frac{R}{p} \cdot \frac{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn} - 1}{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1} = 4 \cdot \frac{\left(1 + \frac{0,185}{4}\right)^{4 \cdot 5} - 1}{\left(1 + \frac{0,185}{4}\right)^4 - 1} = 4 \cdot \frac{1,4701}{0,1982} = 29,669 \text{ млн.руб.}$$

Пример (продолжение)

- 3) проценты начисляются один раз в год, платежи осуществляются поквартально. ($m=1, p=4$).
- Решение:
- $R=4$ млн.руб.; $i=0,185$; $n=5$ лет.

$$FV_f^{post} = \frac{R}{p} \cdot \frac{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn} - 1}{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1} = \frac{4}{4} \cdot \frac{(1 + 0,185)^{1 \cdot 4} - 1}{(1 + 0,185)^{\frac{1}{4}} - 1} = 1 \cdot \frac{1,3366}{0,04335} = 30,833 \text{ млн.руб.}$$

Пример (продолжение)

- 4) проценты начисляются и платежи осуществляются поквартально.
($m=4, p=4$).
- Решение:
- $R=4$ млн.руб.; $i=0,185$; $n=5$ лет.

$$FV_f^{post} = \frac{R}{p} \cdot \frac{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn} - 1}{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1} = \frac{4}{4} \cdot \frac{\left(1 + \frac{0,185}{4}\right)^{4 \cdot 5} - 1}{\left(1 + \frac{0,185}{4}\right)^1 - 1} = 1 \cdot \frac{1,4701}{0,04625} = 31,786 \text{ млн.руб.}$$

Пример (продолжение)

- 5) платежи производятся поквартально, а начисление процентов производится ежемесячно ($m=12, p=4$).

- Решение:

- $R=4$ млн.руб.; $i=0,185$; $n=5$ лет.

$$FV_f^{post} = \frac{R}{p} \cdot \frac{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn} - 1}{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1} = \frac{4}{4} \cdot \frac{\left(1 + \frac{0,185}{12}\right)^{12 \cdot 5} - 1}{\left(1 + \frac{0,185}{12}\right)^{\frac{12}{4}} - 1} =$$
$$= 1 \cdot \frac{1,504132}{0,046967} = 32,025 \text{ млн.руб.}$$