Финансовые ренты

(продолжение)

Основные вопросы

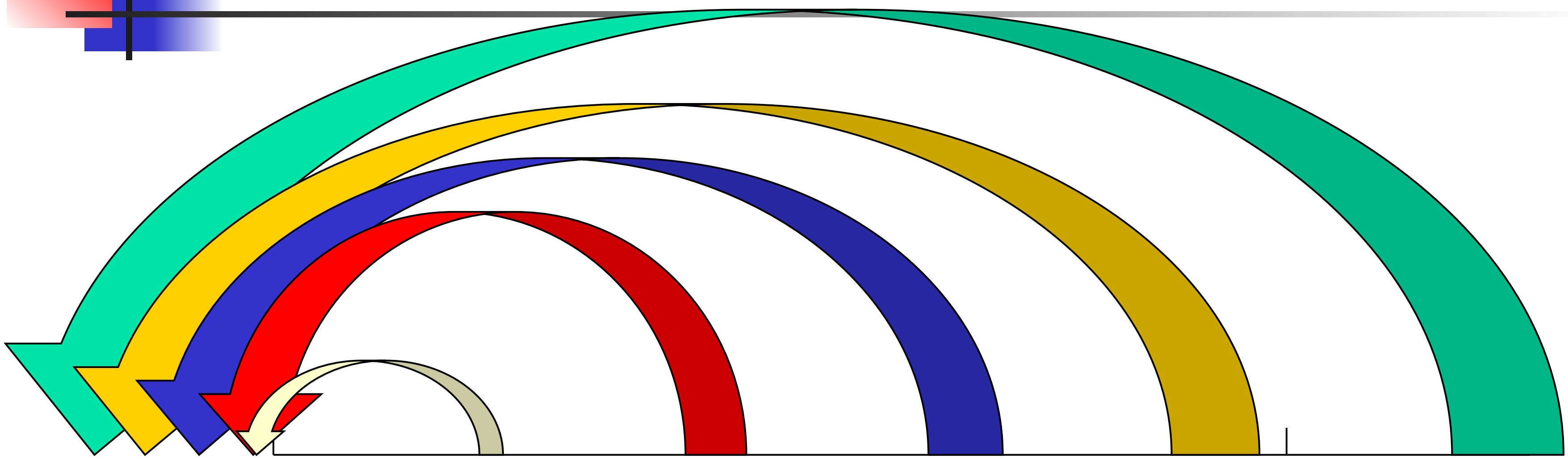
- Определение современной стоимости годовой ренты
- Определение современной стоимости годовой ренты с начислением процентов m раз в год
- Определение современной стоимости финансовой ренты (общий случай).
- Вечные ренты
- Конверсия рент
- Объединение рент
- Определение параметров ренты
- Переменные финансовые ренты

Определение современной стоимости годовой ренты

- Под современной стоимостью финансовой ренты понимают сумму всех платежей, дисконтированных на начало периода первого платежа.
- Дисконтированные отдельные платежи
- $$\frac{R}{1+i};\frac{R}{(1+i)^2};\frac{R}{(1+i)^3};\ldots;\frac{R}{(1+i)^n}$$

представляют собой геометрическую прогрессию с первым членом $\frac{R}{1+i}$ и знаменателем $\frac{1}{1+i}$.

Определение современной стоимости годовой ренты постнумерандо



$$\frac{R}{1+i} \qquad \frac{R}{(1+i)^2} \qquad \frac{R}{(1+i)^3} \quad \cdots \quad \frac{R}{(1+i)^{n-1}} \qquad \frac{R}{(1+i)^n}$$

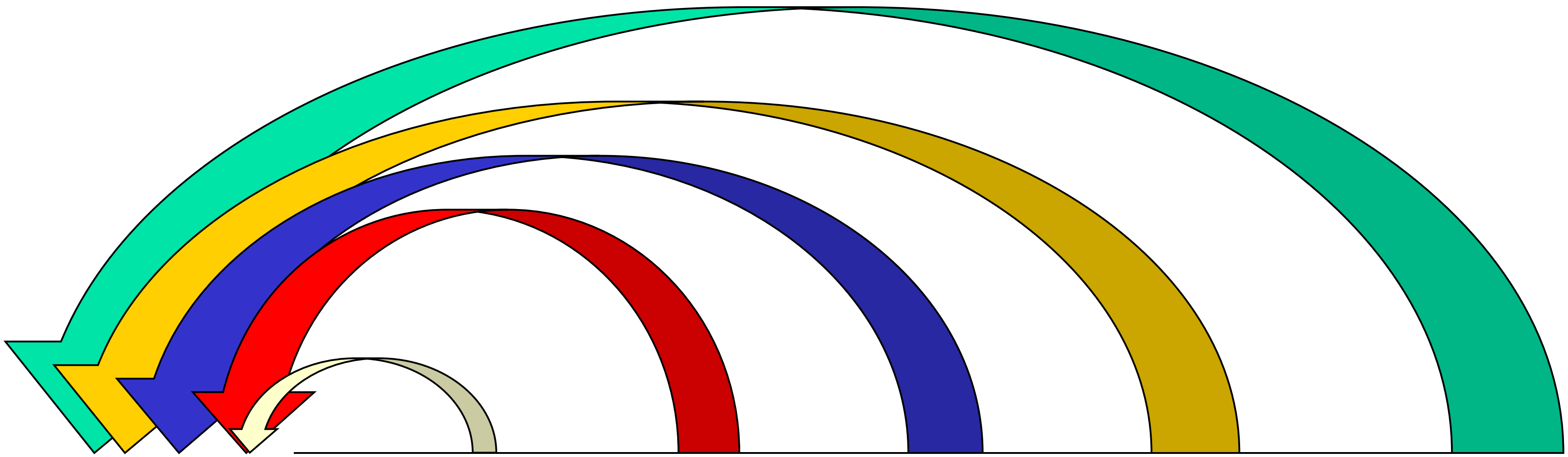
Формула для определения современной стоимости годовой ренты постнумерандо

- Определим сумму геометрической прогрессии:

$$PV_f^{post} = \frac{R}{1+i} \cdot \frac{\left(\frac{1}{1+i}\right)^n - 1}{\frac{1}{1+i} - 1} = R \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i}$$

- Величина $\dfrac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i}$
- называется коэффициентом приведения годовой ренты.

Определение современной стоимости годовой ренты пренумерандо



$$R \qquad \frac{R}{1+i} \qquad \frac{R}{(1+i)^2} \qquad \frac{R}{(1+i)^3} \qquad \cdots \qquad \frac{R}{(1+i)^{n-1}}$$

Определение современной стоимости годовой ренты пренумерандо

- Каждый член полученной геометрической прогрессии в (1+i) раз больше, чем в случае с рентой постнумерандо, следовательно:

$$PV_f^{pre} = R \cdot (1+i) \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i}$$

Пример

- В начале первого периода фирме предложено вложить 8 млн. руб. Доходы от инвестирования ожидаются в конце последующих четырех периодов по 2, 2 млн. руб. Определите, является ли этот проект прибыльным?

- Решение:
- Приведем все суммы к началу первого периода.
- Определим приведенную стоимость финансовой ренты постнумерандо, состоящей из четырех выплат по 2,2 млн. рублей:
- R=2,2 млн. руб.; i=0,1; n=4 года.

$$PV_f^{post} = R \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i} = 2{,}2 \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+0{,}1)^4}}{0{,}1} = 2{,}2 \cdot 3{,}1699 = 6{,}974\,млн.руб.$$

- 6,974<8. Проект убыточный.
- Убыток: 6,974-8=-1,026 млн. руб.

Определение современной стоимости годовой ренты с начислением процентов m в раз в год

- Начисление процентов производится m раз в год, то есть за весь срок ренты m·n раз. Годовой платеж равен R. Для определения современной стоимости ренты определим дисконтные множители каждого платежа:

$$\frac{1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m}};\frac{1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{2m}};\ldots;\frac{1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{nm}}$$

- Современная стоимость ренты может быть определена, как сумма геометрической прогрессии с первым членом $\dfrac{R}{\left(1+\dfrac{i}{m}\right)^{m}}$ и знаменателем $\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{i}{m}\right)^{m}}$

Следовательно:

$$PV^{post}{}_{f} = \frac{R}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m}} \cdot \frac{\dfrac{1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn}} - 1}{\dfrac{1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m}} - 1} = R \cdot \frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{-mn} - 1}{1 - \left(1+\frac{i}{m}\right)^{m}}$$

- Современная стоимость ренты пренумерандо в $\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m}$ раз больше за счет дополнительного m-кратного начисления процентов в течение года по ставке $\frac{i}{m}$. Следовательно:

$$PV^{pre}{}_{f} = R \cdot \frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{-mn} - 1}{1-\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m}} \cdot \left(1+\frac{i}{m}\right)^{m}$$

Пример

- В течение семи лет ежегодно в конце года в фонд поступают по 10 000 рублей. На них ежеквартально начисляются проценты по номинальной ставке 15% годовых. Определите современную стоимость фонда.
- Решение: R=10 000 руб.; i=0,15; m=12; n=7.

$$PV_f = R \cdot \frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{-mn} - 1}{1-\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m}} = 10000 \cdot \frac{\left(1+\frac{0,15}{4}\right)^{-4\cdot 7} - 1}{1-\left(1+\frac{0,15}{4}\right)^{4}} =$$

$$= 10000 \cdot 4,054672 = 40546,72\,руб.$$

Современная стоимость ренты с p платежами в году и начислением процентов m в раз в год

- Предположим, что начисление процентов производится m раз в год в течение n лет по номинальной ставке i. Каждый раз проценты начисляются по ставке i/m. Количество начислений – nm.
- В общем случае современная стоимость финансовой ренты постнумерандо определяется по формуле:

$$PV_f^{post} = \frac{FV_f}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m\cdot n}} = \frac{R}{p}\frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1} : \left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn} =$$

$$= \frac{R}{p} \cdot \frac{1-\left(1+\frac{i}{m}\right)^{-mn}}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1}.$$

Современная стоимость финансовой ренты пренумерандо:

$$PV_f^{pre} = PV_f^{post} \cdot \left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}} =$$

$$= \frac{R}{p} \cdot \frac{1-\left(1+\frac{i}{m}\right)^{-mn}}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1} \cdot \left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}}$$

Пример

- Ежеквартально в течение двух лет на специальный счет поступает 100 000 рублей. Определить современную стоимость финансовой ренты, если проценты по ставке 12% годовых начисляются ежемесячно.

- Решение: $R/p = 100\,000$ руб.; $i=0,12$; $p=4$; $m=12$; $n=2$.

$$PV_f = \frac{FV_f}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m\cdot n}} = \frac{R}{p}\cdot\frac{1-\left(1+\frac{i}{m}\right)^{-mn}}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1} =$$

$$= 100000\cdot\frac{1-\left(1+\frac{0,12}{12}\right)^{-2\cdot 12}}{\left(1+\frac{0,12}{12}\right)^{\frac{12}{4}}-1} =$$

$$= 100000\cdot\frac{0,212434}{0,030301} = 701079,17\,руб.$$

Вечные ренты

- Наращенная сумма вечной ренты при любых ее параметрах равна бесконечно большой величине, в то же время ее современная величина имеет конкретное значение. Современная величина вечной ренты оказывается полезной характеристикой в ряде финансовых расчетов, например при замене некоторых потоков платежей, оценке финансовых инвестиций, в страховых расчетах
- Современная величина вечной годовой ренты определяется по формуле: .

$$PV_{\infty} = \lim_{n \to \infty} R \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i} = \frac{R}{i}$$

Пример

- Квартира арендована за 10 000 $ в год. Какова выкупная цена аренды при годовой ставке процента 5%?
- Решение:
- R = 10 000 $; i = 0,05

$$PV_{\infty} = \frac{R}{i} = \frac{10000}{0,05} = 200000\$$$

Вечные ренты (общий случай)

- Формула для вычисления современной стоимости p-срочной вечной ренты постнумерандо с начислением процентов m раз в году:

$$PV^{post}{}_{\infty} = \lim_{n\to\infty} \frac{R}{p} \cdot \frac{1-\left(1+\dfrac{i}{m}\right)^{-mn}}{\left(1+\dfrac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1} = \frac{R}{p} \cdot \frac{1}{\left(1+\dfrac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1}.$$

- Формула для вычисления современной стоимости p-срочной вечной ренты пренумерандо с начислением процентов m раз в году:

$$PV^{pre}{}_{\infty} = \frac{R}{p} \cdot \frac{\left(1+\dfrac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}}}{\left(1+\dfrac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}.$$

Пример

- Определите цену вечной ренты, выплаты по которой в конце каждого месяца составляют 2 тыс. рублей при номинальной процентной ставке 12% годовых и ежеквартальном начислении процентов.
- Решение:
- R/p =2 000 руб.; i=0,12; p=12; m=4.
- $$PV_{\infty} = \frac{R}{p} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1} = 2000 \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{0{,}12}{4}\right)^{\frac{4}{12}} - 1} =$$

$$= 2000 \cdot \frac{1}{0{,}009902} = 201979{,}4\,руб.$$

Конверсия рент

- Процесс, связанный с изменением условий ренты, называется конверсией ренты.

Конверсия ренты заключается в замене:

а) ренты единовременным платежом,

б) ренты с одним набором условий рентой с другими условиями.

- Конверсия рент основывается на принципе финансовой эквивалентности платежей.
- Алгоритм конверсии рент:
- 1) находят современную величину данной ренты,
- 2) подбирают ренту с такой же современной величиной и нужными параметрами.

Пример

- Годовую ренту пренумерандо со сроком 5 лет, разовым платежом 2000 руб. и процентной ставкой 6% необходимо заменить на ренту сроком 8 лет. Определите параметры ренты.
- Решение: R_1=2 000 руб.; i=0,06; n_1=5;n_2=8.
- 1). Определим современную стоимость такой ренты:

$$PV_f^{pre} = R_1 \cdot (1+i) \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i} =$$

$$= 2000 \cdot (1+0{,}06) \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+0{,}06)^5}}{0{,}06} = 8930{,}21\, руб.$$

- 2) Найдем разовый платеж восьмилетней ренты с такой же современной стоимостью. Для этого составим уравнение эквивалентности:

$$R_2 \cdot (1+0{,}06) \cdot \frac{1-\frac{1}{(1+0{,}06)^8}}{0{,}06} = 8930{,}21;$$

- Разрешим это уравнение относительно R2:

$$R_2 \cdot 6{,}582381 = 8930{,}21;$$

$$R_2 = \frac{8930{,}21}{6{,}582381} = 1356{,}68\,руб.$$

Объединение рент

- Предположим, несколько рент необходимо заменить одной.
- Замена базируется на принципе финансовой эквивалентности обязательств, который реализуется путем составления уравнения эквивалентности.
- Правило объединения рент:
- 1) находят современные величины рент-слагаемых и суммируют их;
- 2) приравнивают полученную сумму современной стоимости заменяющей ренты;
- 3) задав все параметры заменяющей ренты, кроме одного, из уравнения эквивалентности определяют недостающий параметр.

Пример

- Найти ренту-сумму для двух годовых рент постнумерандо: одна -длительностью 5 лет с годовым платежом 1000 $, а другая - 8 лет с годовым платежом 800 $. Годовая ставка процента равна 8%. Длительность новой ренты 6 лет.
- Решение:

$$R_1 = 1000\$; n_1 = 5\,лет; R_2 = 800\$; n_2 = 8\,лет, i = 0{,}08.$$

- 1). Современная величина первой ренты:

$$PV^1{}_f = R_1 \cdot \frac{1 - \dfrac{1}{(1+i)^{n_1}}}{i} = 1000 \cdot \frac{1 - \dfrac{1}{(1+0{,}08)^5}}{0{,}08} =$$

$$= 1000 \cdot 3{,}9927 = 3992{,}7\$$$

- Современная величина второй ренты:

$$PV_f^2 = R_2 \cdot \frac{1-\dfrac{1}{(1+i)^{n_2}}}{i} = 800 \cdot \frac{1-\dfrac{1}{(1+0{,}08)^8}}{0{,}08} =$$

$$= 800 \cdot 5{,}7466 = 4597{,}28\$.$$

- 2). Современная величина ренты-суммы:

3992,7+4597,28=8589,98 3$.

- 3) Теперь можно задать либо длительность ренты-суммы, либо годовой платеж и затем определить второй из этих параметров.

- Предположим, что рента – сумма имеет длительность 6 лет, тогда уравнение эквивалентности имеет вид:

$$R_3 \cdot \frac{1-\frac{1}{1{,}08^6}}{0{,}08} = 8589{,}98 \quad или$$

$$R_3 \cdot 4{,}6229 = 8589{,}98;$$

- Отсюда $$R_3 = \frac{8589{,}98}{4{,}6229} = 1858{,}14\$$$

Определение параметров ренты

- Постоянная рента описывается набором основных параметров R, n, i и дополнительными параметрами p и m.
- Однако при разработке контрактов и условий финансовых операций могут возникнуть случаи, когда задается одна из двух обобщающих характеристик FV_f или PV_f и два основных параметра. В этом случае возникает необходимость определить значение недостающего параметра.

а) Определение члена ренты

- Задается FV_f или PV_f и набор параметров, кроме R. Необходимо определить значение R.
- Пример
- Определите ежегодный платеж для создания целевого фонда для погашения задолженности в сумме 100 тыс. рублей через 5 лет. Процентная ставка равна 20%.

- Решение:
- FV_f =100 000 руб.; i=0,2; n = 5.

$$FV_f^{\,post} = 100000\,руб.; \qquad или$$

$$R \cdot \frac{(1+0{,}2)^5 - 1}{0{,}2} = 100000;$$

$$\frac{(1+0{,}2)^5 - 1}{0{,}2} = 7{,}441;$$ Отсюда R·7,4416=100000;

Следовательно, R=100 000:7,4416=13438 рублей.

б) Определение срока ренты

- Иногда при разработке условий контракта возникает необходимость определения срока ренты, если известны ее остальные параметры.
- Пример
- Какой срок необходим для накопления 100 тыс. руб. при условии, что ежемесячно вносится по 1 тыс. руб., и на ежемесячные вложения начисляются проценты по ставке 24 % годовых?

- Решение:
- R/p=1000руб.; i=0,24; p=12; m=12.

$$FV_f^{post}=\frac{R}{p}\cdot\frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1}.\quad 100000=1000\cdot\frac{\left(1+\frac{0,24}{12}\right)^{12n}-1}{\left(1+\frac{0,24}{12}\right)^{\frac{12}{12}}-1}.$$

$$100000=1000\cdot\frac{(1,02)^{12n}-1}{(1,02)^{1}-1}.\qquad 1,02^{12n}-1=100\cdot 0,02.$$

$$1,02^{12n}=2+1;\text{или}\,1,02^{12n}=3.$$

$$12n\cdot\ln 1,02=\ln 3.\quad n=\frac{\ln 3}{12\cdot\ln 1,02}=\frac{1,0986}{12\cdot 0,0198}=4,6\quad\text{года}.$$

Переменные финансовые ренты

- Наряду с постоянными рентами, в последние годы, в финансовой практике часто встречаются ренты, параметры которых изменяются во времени. Такие ренты носят называние переменных во времени.

- Суть расчета в этом случае сводится к тому, что, если процесс изменения переменной ренты носит не систематический характер, и соответственно его нельзя описать аналитически, то величину будущей и современной стоимостей таких потоков следует определять прямым счетом, наращивая и дисконтируя к требуемому моменту времени отдельные платежи и затем суммируя полученные величины.

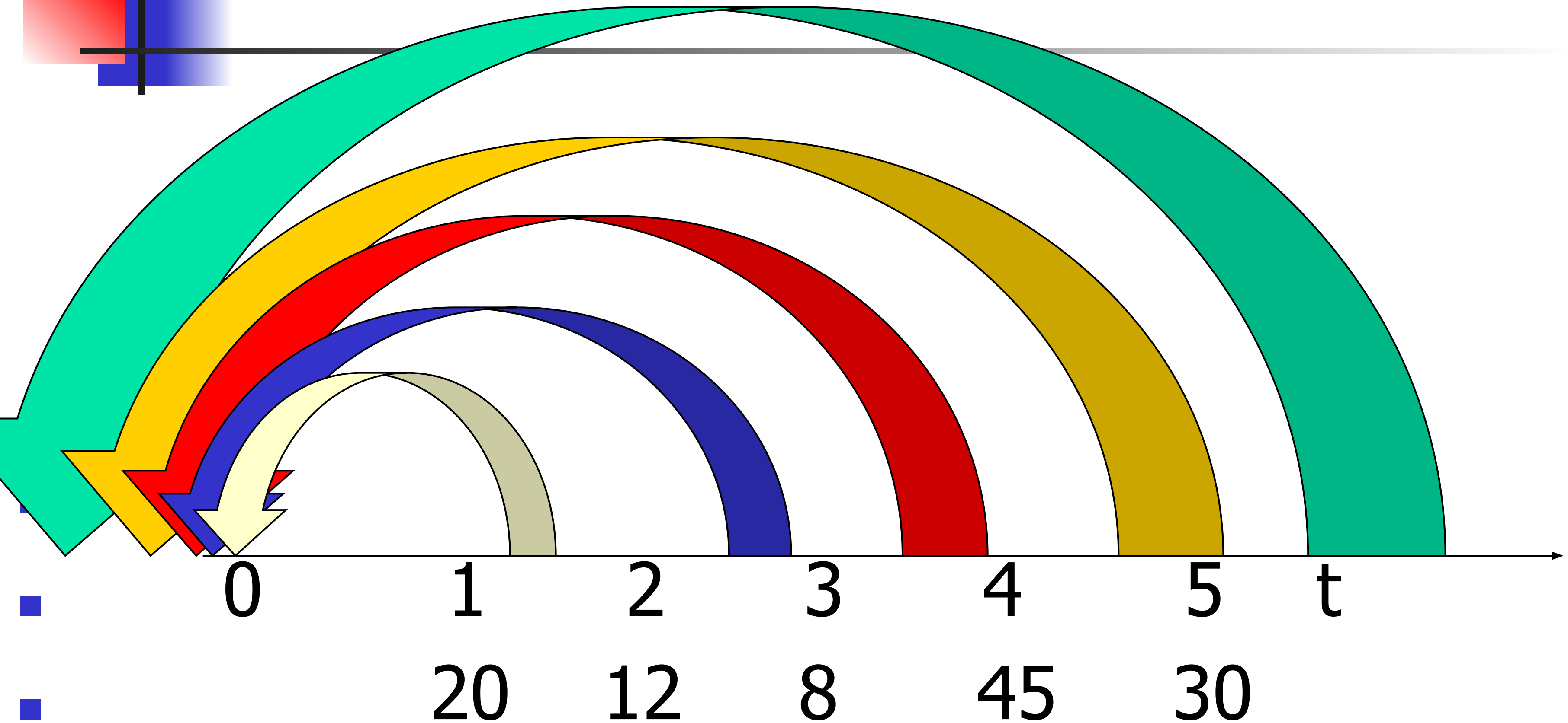
- В общем случае современную стоимость финансовой ренты постнумерандо можно представить таким образом:

$$PV_f = \frac{R_1}{1+i} + \frac{R_2}{(1+i)^2} \dots + \frac{R_n}{(1+i)^n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{R_k}{(1+i)^k}$$

- Здесь R_k – ожидаемые поступления в момент времени k (k=1,2,…,n).
- n – временной горизонт.

Пример

- Имеется финансовый поток постнумерандо: 20, 12, 8, 45, 30 тыс. руб. Рассчитайте современную стоимость финансового потока, если его период совпадает с базовым периодом начисления процентов по сложной процентной ставке 25% годовых, т. е. равен одному году. Как изменится оценка финансового потока, если он представляет собой поток пренумерандо?


0
1
2
3
4
5
t
20
12
8
45
30

Год	Денежный поток	Дисконтный множитель	Приведенный поток
1	20	$\frac{1}{1+0,25}=0,8$	16
2	12	$\frac{1}{(1+0,25)^2}=0,64$	7,68
3	8	$\frac{1}{(1+0,25)^3}=0,512$	4,096
4	45	$\frac{1}{(1+0,25)^4}=0,4096$	18,432
5	30	$\frac{1}{(1+0,25)^5}=0,3277$	9,831
			56,039

- Современная стоимость финансового потока постнумерандо равна 56035 рублей.
- Современная стоимость финансового потока пренумерандо:56053·(1+0,25)=70066,25 руб.