

Квадратные уравнения

**Квадратное уравнение имеет
действительные положительные корни, если**

$$\left\{ \begin{array}{l} D = b^2 - 4ac \geq 0, \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} > 0, \\ x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0. \end{array} \right.$$

**Квадратное уравнение имеет
действительные отрицательные
корни, если**

$$\left\{ \begin{array}{l} D = b^2 - 4ac \geq 0, \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} > 0, \\ x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} < 0. \end{array} \right.$$

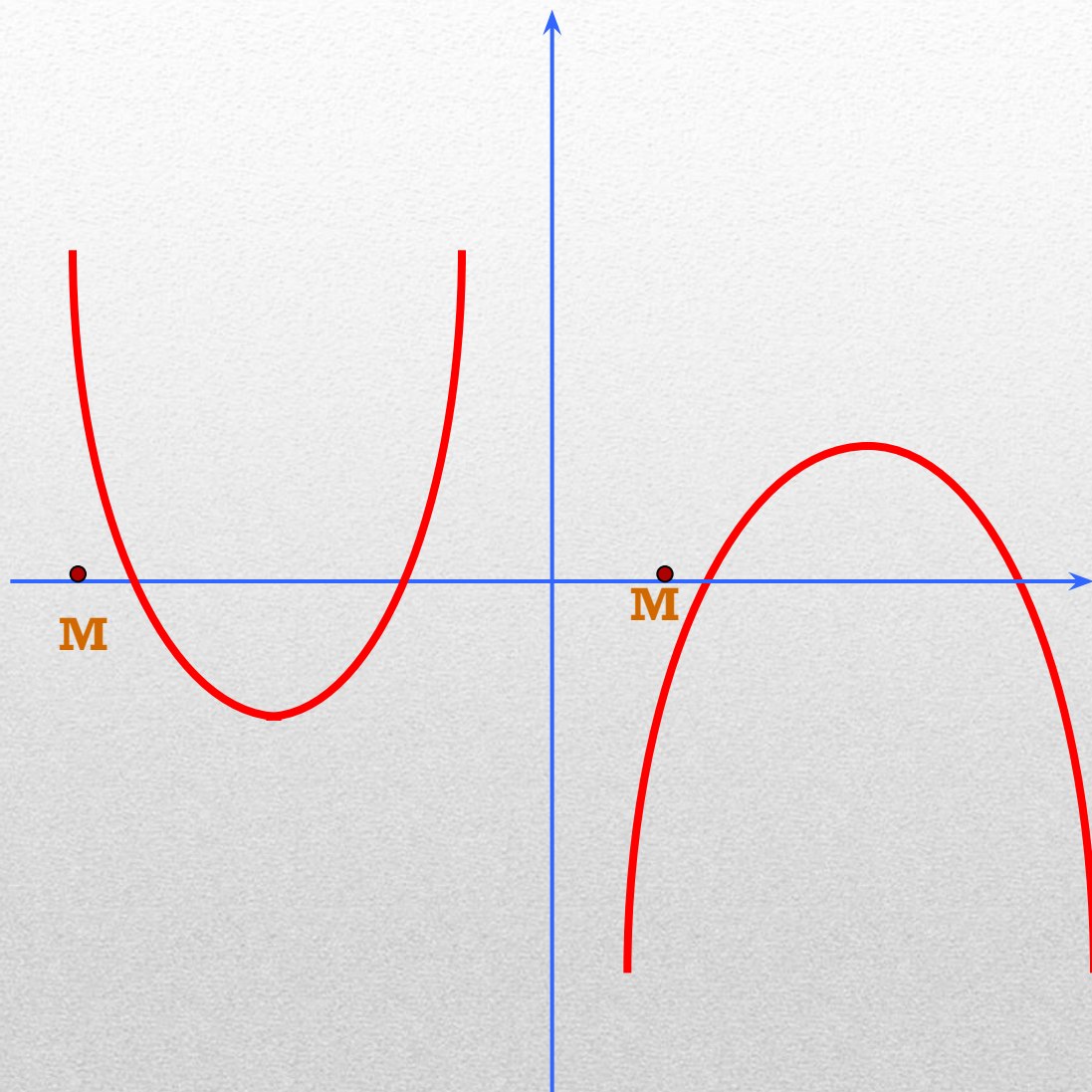
**Квадратное уравнение имеет действительные корни
различных знаков,
причем положительный корень имеет больший модуль,
если**

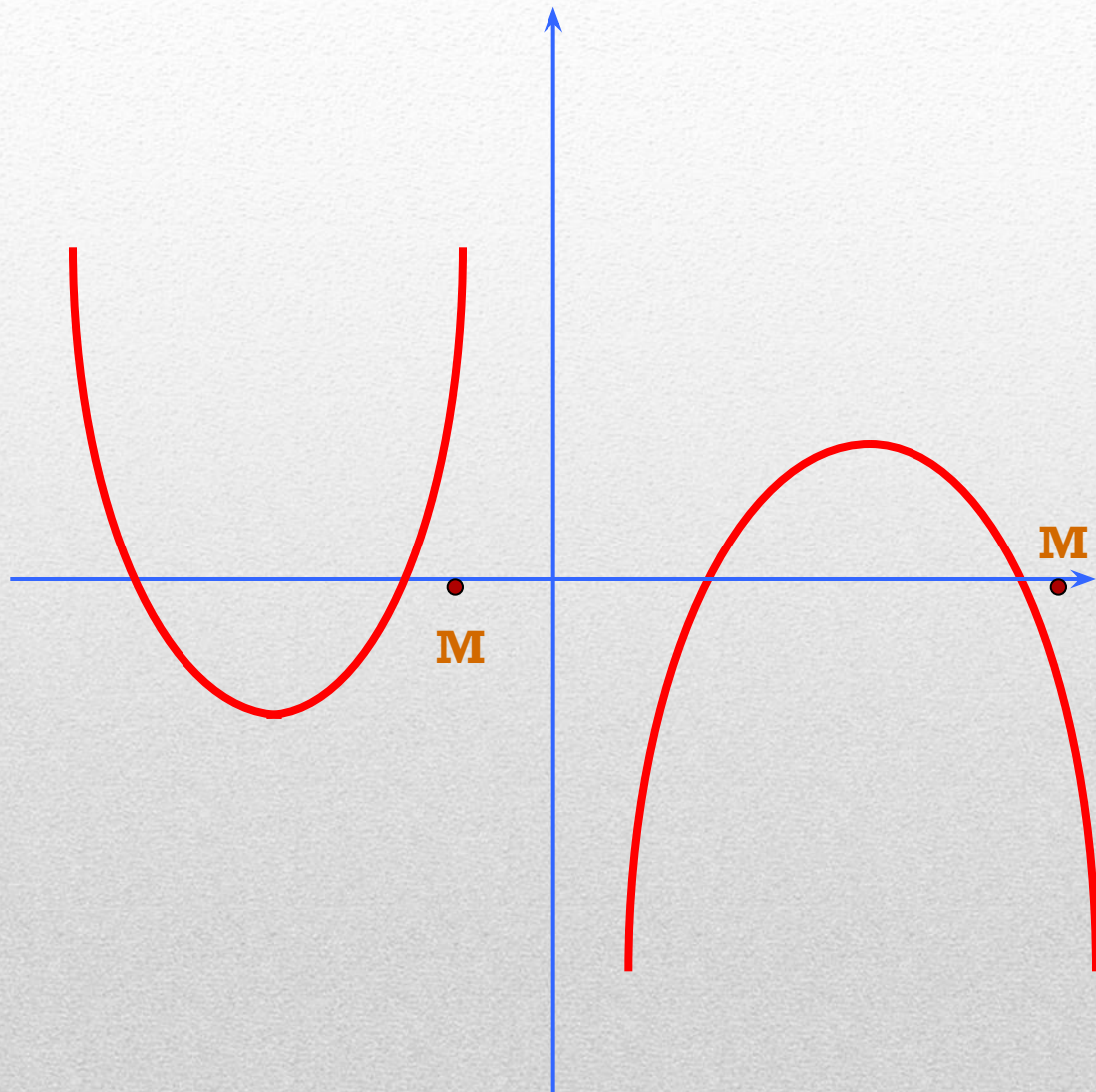
$$\left\{ \begin{array}{l} D = b^2 - 4ac > 0, \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} < 0, \\ x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0. \end{array} \right.$$

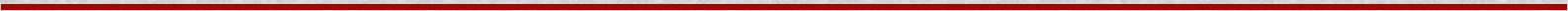
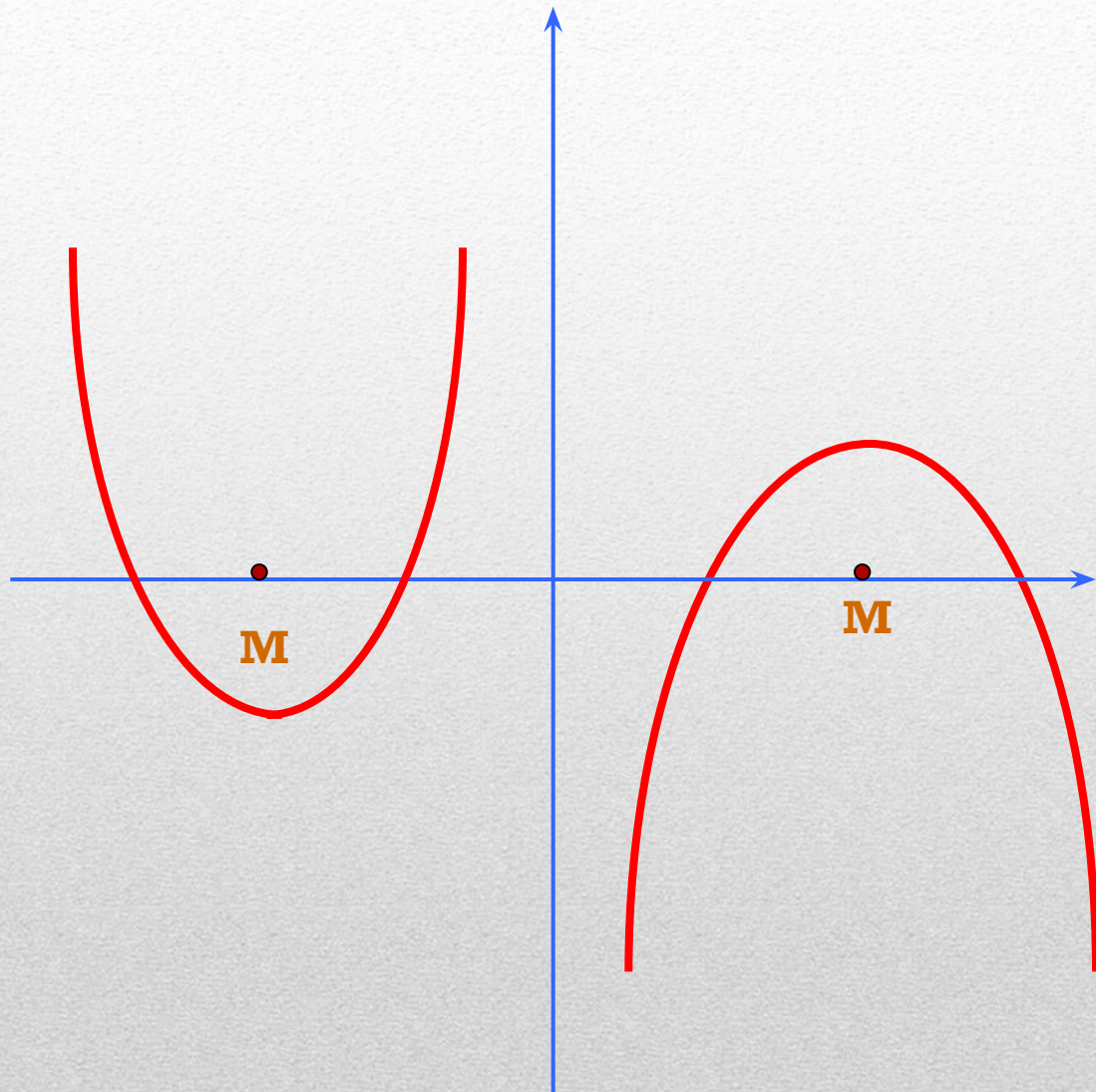
Квадратное уравнение имеет действительные корни различных знаков, причем отрицательный корень имеет больший модуль, если

$$\left\{ \begin{array}{l} D = b^2 - 4ac > 0, \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} < 0, \\ x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} < 0. \end{array} \right.$$

Расположение корней относительно заданной точки определяется направлением ветвей соответствующей параболы, координатами вершины и значениями в заданных точках. В этих задачах хорошо работают графические иллюстрации.







**Оба корня квадратного трехчлена МЕНЬШЕ
числа M ,
тогда и только тогда, когда**

$$\left\{ \begin{array}{l} a > 0, \\ D = b^2 - 4ac \geq 0, \\ -\frac{b}{2a} < M, \\ f(M) > 0. \end{array} \right.$$

или

$$\left\{ \begin{array}{l} a < 0, \\ D = b^2 - 4ac \geq 0, \\ -\frac{b}{2a} < M, \\ f(M) < 0. \end{array} \right.$$

**Оба корня квадратного трехчлена
больше числа M ,
тогда и только тогда, когда**

$$\left\{ \begin{array}{l} a > 0, \\ D = b^2 - 4ac \geq 0, \\ -\frac{b}{2a} > M, \\ f(M) > 0. \end{array} \right.$$

или

$$\left\{ \begin{array}{l} a < 0, \\ D = b^2 - 4ac \geq 0, \\ -\frac{b}{2a} > M, \\ f(M) < 0. \end{array} \right.$$

**Один из корней квадратного трехчлена
меньше числа M ,
а другой больше числа M ,
тогда и только тогда, когда**

$$\begin{cases} a > 0, \\ D = b^2 - 4ac > 0, \\ f(M) < 0. \end{cases} \quad \text{или}$$

$$\begin{cases} a < 0, \\ D = b^2 - 4ac > 0, \\ f(M) > 0. \end{cases}$$

При каких значениях
параметра m уравнение

$$(m - 1)x^2 + (m + 4)x + m + 7 = 0$$

имеет не более одного
действительного корня?

При каких значениях
параметра m корни
уравнения

$$(m - 1)x^2 - 2mx + m + 3 = 0$$

различны и положительны?

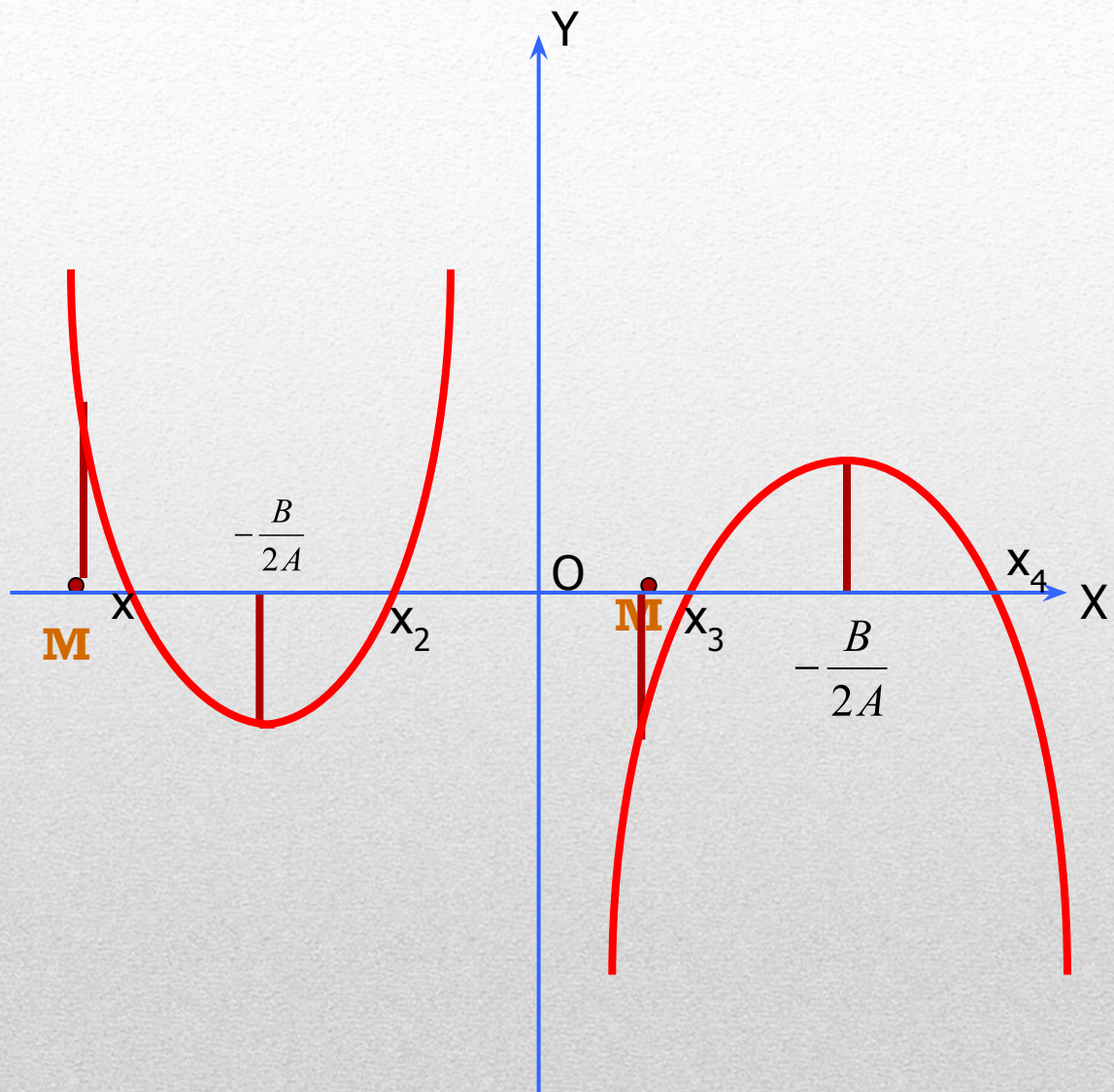
При каких значениях параметра a
корни уравнения

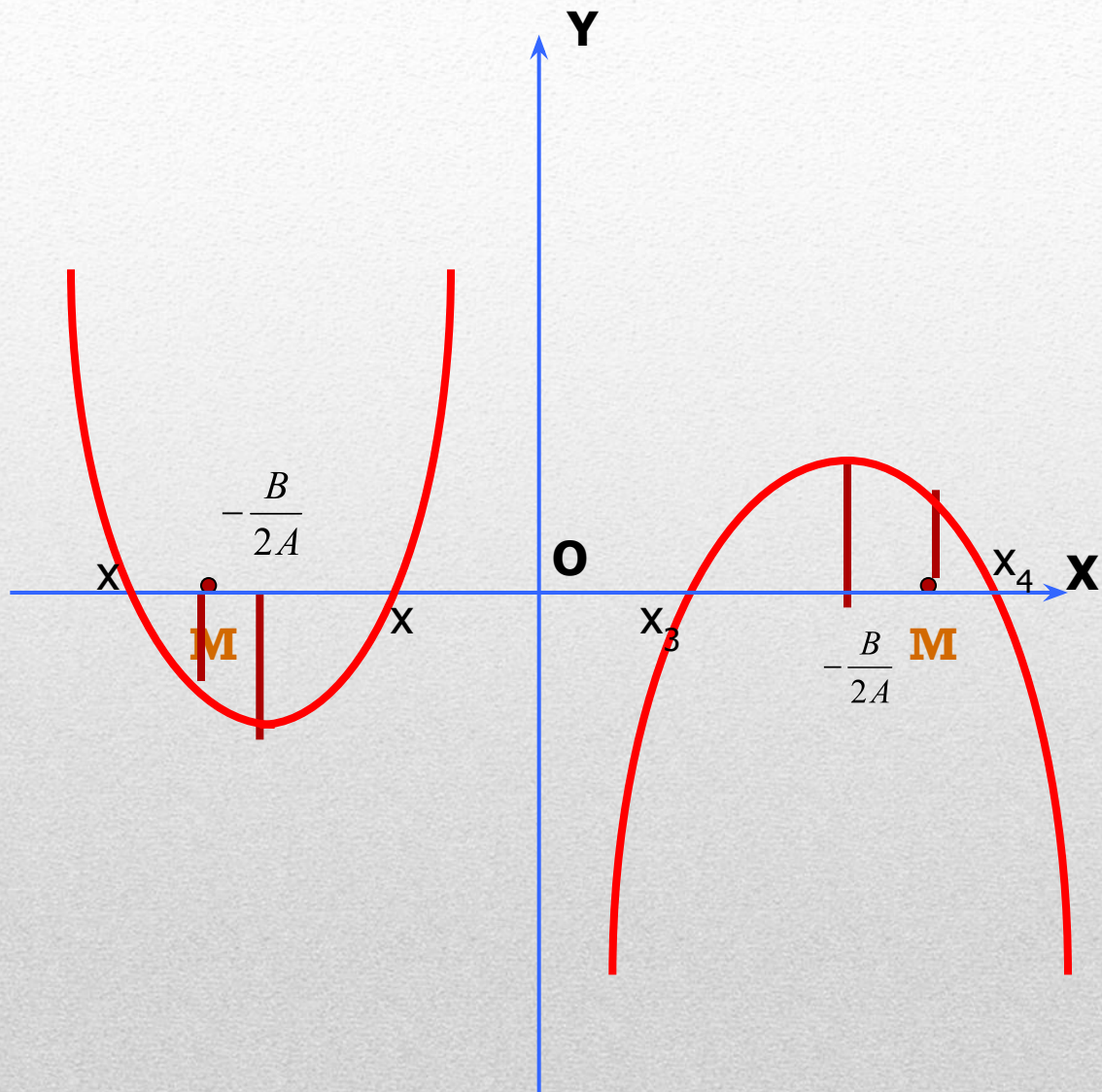
$$(a - 1)x^2 - (4a + 5)x + a - 3 = 0$$

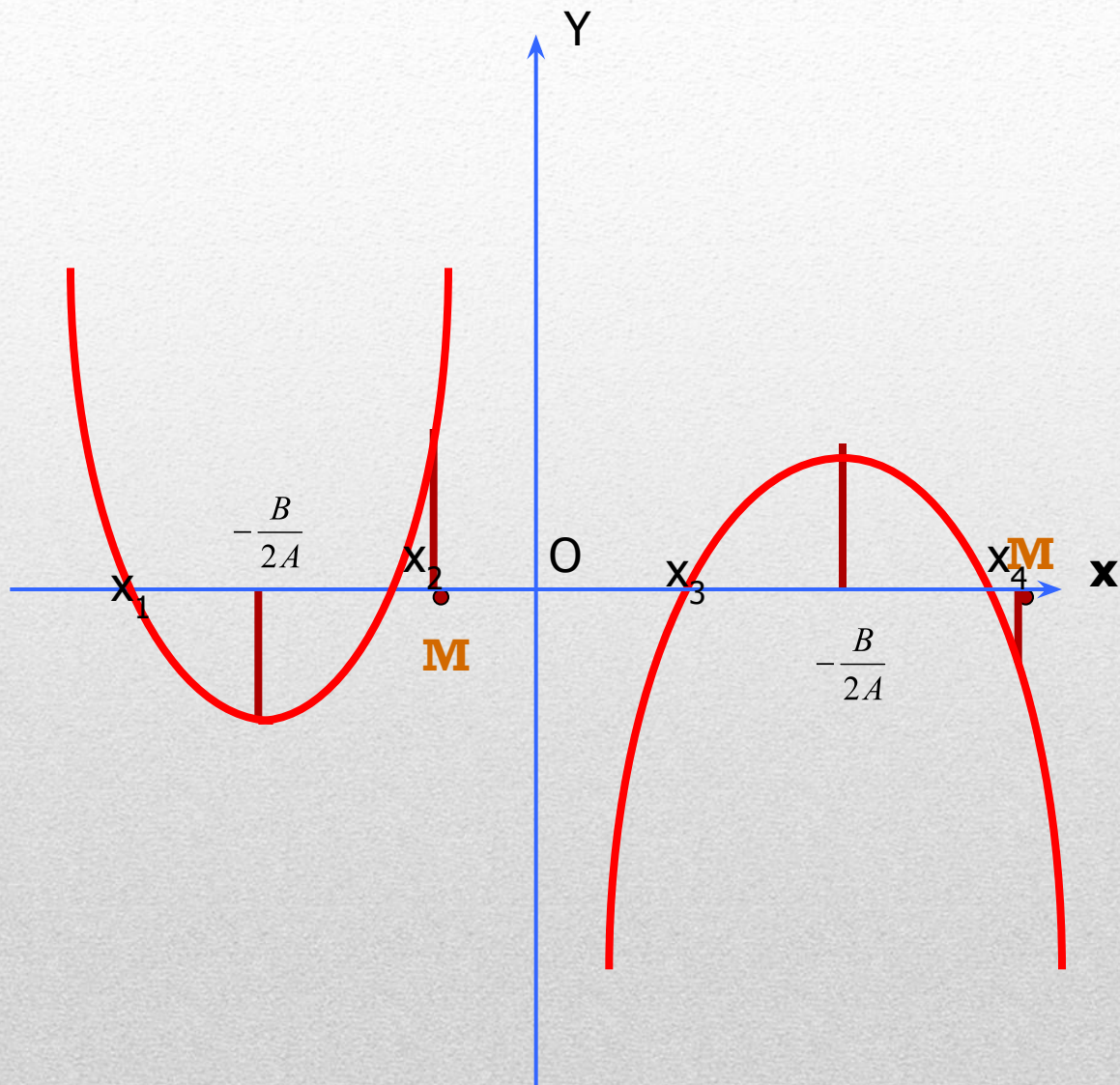
таковы, что сумма
их квадратов равна 1,75?

Нахождение значений
параметра,
при которых решения
удовлетворяют некоторому
условию.

Решение уравнений
для всех значений параметра a







Оба корня квадратного уравнения

$$A(a)x^2 + B(a)x + C(a) = 0$$

больше заданного числа **M** тогда и только тогда, когда имеет место система

$$\begin{cases} Af(M) > 0, \\ D > 0, \\ -\frac{B}{2A} > M. \end{cases}$$

Оба корня квадратного уравнения

$$A(a)x^2 + B(a)x + C(a) = 0$$

меньше заданного числа **M** тогда и только тогда, когда имеет место система

$$\begin{cases} Af(M) > 0, \\ D > 0, \\ -\frac{B}{2A} < M. \end{cases}$$

Заданное число **M** лежит между корнями

$$A(a)x^2 + B(a)x + C(a) = 0$$

тогда и только тогда, когда имеет место неравенство

$$Af(M) < 0$$

При каких значениях параметра a корни квадратного уравнения

$$x^2 + (a + 1)x + 3 = 0$$

лежат по разные стороны от числа 2 ?

Решение.

Рассмотрим функцию $f(x) = x^2 + (a + 1)x + 3$.

$$f(2) < 0;$$

$$f(2) = 4 + 2a + 2 + 3 = 2a + 9 < 0$$

$$2a < -9$$

$$a < -4.5$$

Ответ. $a \in (-\infty; -4.5)$

При каких значениях параметра a оба корня квадратного уравнения

$$(2-a)x^2 - 3ax + 2a = 0$$

больше $\frac{1}{2}$.

Решение.

Рассмотрим функцию $f(x) = (2-a)x^2 - 3ax + 2a$.

$$\left\{ \begin{array}{l} Af(M) > 0, \\ D > 0, \\ -\frac{B}{2A} > M. \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} (2-a)\left(\frac{1}{2} - \frac{a}{4} - \frac{3a}{2} + 2a\right) > 0, \\ 9a^2 - 8a(2-a) > 0, \\ \frac{3a}{2-a} > \frac{1}{2}; \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} (2-a)\left(\frac{2}{4} + \frac{a}{4}\right) > 0, \\ a^2 - 16a > 0, \\ \frac{3a}{2-a} - \frac{1}{2} > 0; \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} (2-a)(a+2) > 0, \\ a(a-16) > 0, \\ \frac{6a-2+a}{2-a} > 0; \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} a \in (-2; 2) \\ a \in (-\infty; 0) \cup (16; +\infty), \\ \frac{7a-2}{2-a} > 0; \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} a \in (-2; 2) \\ a \in (-\infty; 0) \cup (16; +\infty), \\ a \in \left(\frac{2}{7}; 2\right); \end{array} \right.$$

Решений нет.

Ответ. Решений нет.

Найти все значения параметра a , при которых
оба корня квадратного уравнения

$$x^2 - 6ax + (2 - 2a + 9a^2) = 0$$

больше 3.

Решение.

Рассмотрим функцию $f(x) = x^2 - 6ax + (2 - 2a + 9a^2)$

$$\begin{cases} Af(M) > 0, \\ D > 0, \\ -\frac{B}{2A} > M. \end{cases} \iff \begin{cases} 9 - 18a + 2 - 2a + 9a^2 > 0, \\ 36a^2 - 8 - 8a - 36a^2 > 0, \\ \frac{6a}{2} > 3. \end{cases} \iff \begin{cases} 9a^2 - 20a + 11 > 0, \\ a + 1 > 0, \\ a > 1. \end{cases} \iff \begin{cases} a \in (-\infty; 1) \setminus \left(1\frac{2}{9}; +\infty\right), \\ a > -1, \\ a > 1. \end{cases}$$

$$a \in \left(1\frac{2}{9}; +\infty\right)$$

Ответ: $\left(1\frac{2}{9}; +\infty\right)$

Найти все значения параметра a , которых оба корня квадратного уравнения

$$x^2 + 4ax + (1 - 2a + 4a^2) = 0$$

меньше -1 .

Решение.

Рассмотрим функцию $f(x) = x^2 + 4ax + (1 - 2a + 4a^2)$.

$$\begin{cases} Af(M) > 0, \\ D > 0, \\ -\frac{B}{2A} < M. \end{cases} \iff \begin{cases} 1 - 4a + 1 - 2a + 4a^2 > 0, \\ 16a^2 - 4 + 8a - 16a^2 > 0, \\ -\frac{4a}{2} < -1. \end{cases} \iff \begin{cases} a \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cap (1; +\infty) \\ a > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ответ. $a \in (1; +\infty)$
