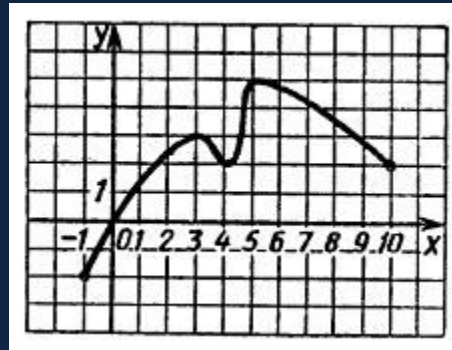


Возрастание и убывание функций

- Познакомимся на примере с возрастанием и убыванием функции. На рисунке ниже изображен график функции, определенной на отрезке $[-1;10]$. Эта функция возрастает на отрезках $[-1;3]$ и $[4;5]$, и убывает на отрезках $[3;4]$ и $[5;10]$.



- Рассмотрим еще один пример. Очевидно, что функция $y=x^2$ убывает на промежутке $(-\infty; 0]$ и возрастает на промежутке $[0; \infty)$. Видно, что график этой функции при изменении x от $-\infty$ до 0 сначала опускается до нуля, а затем поднимается до бесконечности.

Определение. Функция f возрастает на множестве P , если для любых x_1 и x_2 из множества P , таких, что $x_2 > x_1$, выполнено неравенство $f(x_2) > f(x_1)$.

Определение. Функция f убывает на множестве P , если для любых x_1 и x_2 из множества P , таких, что $x_2 > x_1$, выполнено неравенство $f(x_2) < f(x_1)$.

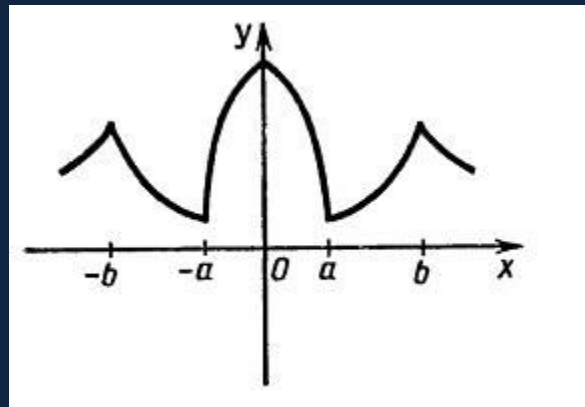
Иначе говоря, функция f называется возрастающей на множестве P , если большему значению аргумента из этого множества соответствует большее значение функции. Функция f называется убывающей на множестве P , если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

Возрастание и убывание четных функций

- Для четных функций задача нахождения промежутков возрастания и убывания сильно упрощается. Достаточно всего лишь найти промежутки возрастания и убывания при $x \geq 0$ (см. рисунок внизу).

Пусть, например, функция f четна и возрастает на промежутке $[a; b]$, где $b > a \geq 0$. Докажем, что эта функция убывает на промежутке $[-b; -a]$.

Действительно, пусть $-a \geq x_2 > x_1 \geq -b$. Тогда $f(-x_2) = f(x_2)$, $f(-x_1) = f(x_1)$, причем $a \leq -x_2 < -x_1 \leq b$, и, поскольку f возрастает на $[a; b]$, имеем $f(-x_1) > f(-x_2)$, то есть $f(x_1) > f(x_2)$.



Возрастание и убывание функции синус

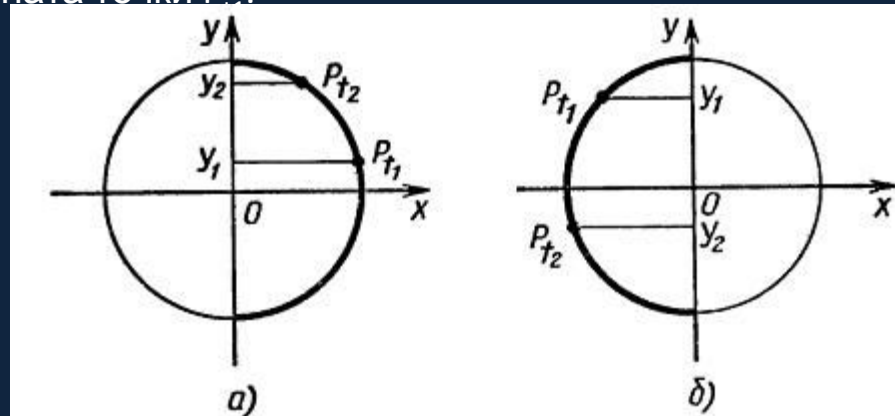
- Докажем, что синус возрастает на промежутках $[-\pi/2 + 2\pi n ; \pi/2 + 2\pi n]$, n - целое. В силу периодичности функции синуса доказательство достаточно провести для отрезка $[-\pi/2 ; \pi/2]$. Пусть $x_2 > x_1$. Применим формулу разности синусов и найдем:

Из неравенства $-\pi/2 \leq x_1 < x_2 \leq \pi/2$ следует, что $\cos x_1 > \cos x_2$, поэтому $\sin x_2 - \sin x_1 = 2 \cos \frac{x_1 + x_2}{2} \sin \frac{x_2 - x_1}{2} > 0$, следовательно $\sin x_2 > \sin x_1$.

Это доказывает, что на указанных промежутках синус возрастает.

Аналогичным образом легко доказать, что промежутки $[\pi/2 + 2\pi n ; 3\pi/2 + 2\pi n]$, n - целое, являются промежутками убывания функции синуса.

Полученный результат можно легко проиллюстрировать с помощью рисунка единичной окружности (см. рисунок ниже). Если $-\pi/2 \leq t_1 < t_2 \leq \pi/2$, то точка P_{t_2} имеет ординату большую, чем точка P_{t_1} . Если же $\pi/2 \leq t_1 < t_2 \leq 3\pi/2$, то ордината точки P_{t_2} меньше, чем ордината точки P_{t_1} .



Возрастание и убывание функции косинус

Промежутками возрастания косинуса являются отрезки $[-\pi + 2\pi n ; 2\pi n]$, n - целое. Промежутками убывания косинуса являются отрезки $[2\pi n ; \pi + 2\pi n]$, n - целое. Доказательство этих утверждений можно провести аналогично доказательству для синуса.

Однако, проще воспользоваться формулой приведения $\cos(x) = \sin(x + \pi/2)$, из которой сразу следует, что промежутками возрастания косинуса являются промежутки возрастания синуса, сдвинутые на $\pi/2$ влево. Аналогичное утверждение можно сделать и для промежутков убывания.



Автор: Сабитова
Файруза Рифовна
учитель математики
1 квалификационной
категории