

**«Классическая логика  
высказываний»**

Подготовил студент

Группы Ю – 103

Казьмин Георгий

# Язык логики высказываний и семантика логических союзов

- Пропозициональные переменные  
–  $p, q, r, s, t, p_1, q_1, \dots$
- Логические союзы (пропозициональные связки)

Логический союз	Аналог в естественном языке	Знак
Конъюнкция	«и»	$\&, \bullet, \wedge (p \wedge q)$
Слабая дизъюнкция	«или»	$p \vee q$
Строгая дизъюнкция	«либо..., либо...»	$\boxplus, p \leftrightarrow q$
Импликация	«если ..., то ...»	$\supset, (p \rightarrow q)$
Эквиваленция	«... тогда и только тогда, когда ...»	$\equiv, (p \leftrightarrow q)$
Отрицание	«не ...», «не верно, что ...»	$\bar{P}, \neg p, \sim p$

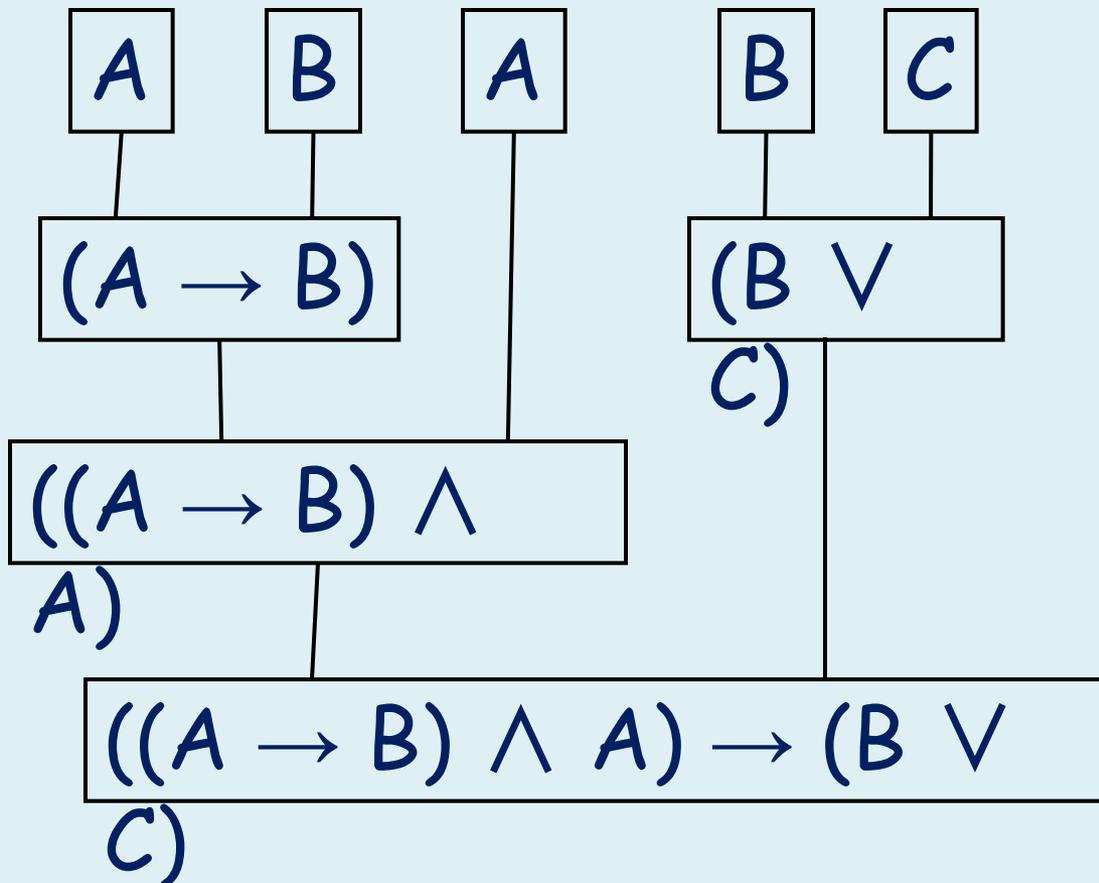
- Технические знаки - (, )

# Определение формулы логики высказываний

1. Пропозициональная переменная есть формула;
2. если  $A$  - формула, то  $\sim A$  тоже формула;
3. если  $A$  - формула и  $B$  - формула, то  $(A \wedge B)$ ,  $(A \vee B)$ ,  $(A \nrightarrow B)$ ,  $(A \rightarrow B)$ ,  $(A \leftrightarrow B)$  - тоже формулы;
4. любая последовательность знаков из алфавита языка логики высказываний есть формула только в силу пунктов 1, 2, 3 данного определения.

# Построение дерева формулы

- $((A \rightarrow B) \wedge A) \rightarrow (B \vee C)$



# Семантика логических союзов

<b>A</b>	<b>B</b>	<b><math>\sim A</math></b>	<b><math>A \wedge B</math></b>	<b><math>A \vee B</math></b>	<b><math>A \rightarrow B</math></b>	<b><math>A \leftrightarrow B</math></b>	<b><math>A \leftrightarrow B</math></b>
<b>И</b>	<b>И</b>	<b>Л</b>	<b>И</b>	<b>И</b>	<b>И</b>	<b>И</b>	<b>Л</b>
<b>И</b>	<b>Л</b>	<b>Л</b>	<b>Л</b>	<b>И</b>	<b>Л</b>	<b>Л</b>	<b>И</b>
<b>Л</b>	<b>И</b>	<b>И</b>	<b>Л</b>	<b>И</b>	<b>И</b>	<b>Л</b>	<b>И</b>
<b>Л</b>	<b>Л</b>	<b>И</b>	<b>Л</b>	<b>Л</b>	<b>И</b>	<b>И</b>	<b>Л</b>

# Таблицы истинности формул логики высказываний

Некто  $A$  говорит: «Я лжец, а  $B$  не лжец».

Кто  $A$  и кто  $B$ ?

« $A$  рыцарь» -  $A$

« $A$  лжец» -  $\sim A$

$\sim$      $\wedge$      $B$   
 $A$

$A$	$B$	$\sim A$	$\sim A \wedge B$
И	И	Л	Л
И	Л	Л	Л
Л	И	И	И
Л	Л	И	Л

# Таблицы истинности формул логики высказываний

- Если магнит нагревать, то он размагнитится. Этот магнит нагревали, следовательно, он размагничен.
- $((A \rightarrow B) \wedge A) \rightarrow B$

A	B	$A \rightarrow B$	$((A \rightarrow B) \wedge A)$	$((A \rightarrow B) \wedge A) \rightarrow B$
И	И	И	И	И
И	Л	Л	Л	И
Л	И	И	Л	И
Л	Л	И	Л	И

# Пример 1

## Где сидит принцесса?

**1**  
По крайней мере, в одной из этих комнат находится принцесса



**2**  
Тигр сидит в другой комнате

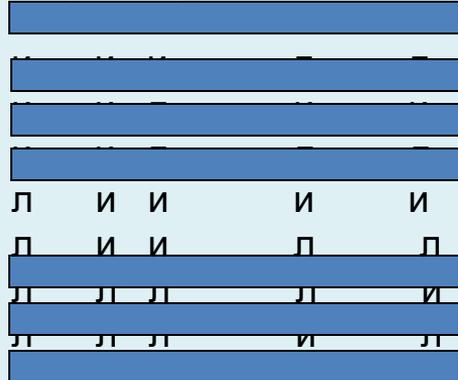


Истинны ли утверждения на дверях комнат? - спросил узник  
 Может, оба истинны, а может, оба ложны - ответил король.

Принцесса в комнате 1 -  $p_1$   
 Принцесса в комнате 2 -  $p_2$   
 Тигр в комнате 1 -  $t_1$



$(p_1 \vee p_2) \leftrightarrow t_1$



# Основные модусы логики высказываний

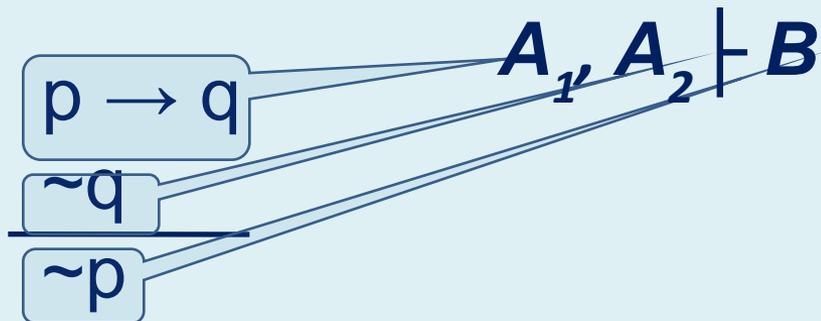
<b>MODUS PONENS</b>	$A \rightarrow B$ $A$ — $B$	$((A \rightarrow B) \wedge A) \rightarrow B$
---------------------	--------------------------------------	--

<b>MODUS TOLLENS</b>	$A \rightarrow B$ $\sim B$ — $\sim A$	$((A \rightarrow B) \wedge \sim B) \rightarrow \sim A$
----------------------	--	--

<b>A</b>	<b>B</b>	<b><math>A \rightarrow B</math></b>
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	И
Л	Л	И

# Отношение логического следования

- Формула ***V*** логически следует из формул ***A*<sub>1</sub>**, ***A*<sub>2</sub>**, ..., ***A*<sub>n</sub>** (***A*<sub>1</sub>**, ***A*<sub>2</sub>**, ..., ***A*<sub>n</sub>** ⊢ ***V***), если и только если в каждой пропозициональной интерпретации, в которой все формулы ***A*<sub>1</sub>**, ***A*<sub>2</sub>**, ..., ***A*<sub>n</sub>** принимают значение «***u***», формула ***V*** также есть «***u***».

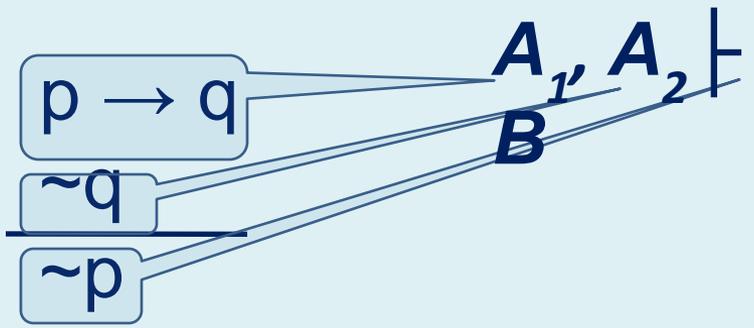


# Отношение логического следования

- Задача установления того, следует ли высказывание  $B$  из высказываний  $A_1, A_2, \dots, A_n$  сводится к задаче выяснения является ли высказывание  $((A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow B)$  тождественно истинным (тавтологией, законом логики).

# Отношение логического следования

- Формула ***V*** логически следует из формул ***A*<sub>1</sub>, *A*<sub>2</sub>, ..., *A*<sub>*n*</sub> (***A*<sub>1</sub>, *A*<sub>2</sub>, ..., *A*<sub>*n*</sub> ⊢ ***V***), если и только если в каждой пропозициональной интерпретации, в которой все формулы ***A*<sub>1</sub>, *A*<sub>2</sub>, ..., *A*<sub>*n*</sub> принимают значение «***u***», формула ***V*** также есть «***u***».******



$$\begin{array}{l}
 (A_1 \wedge A_2) \rightarrow \\
 B \\
 ((p \rightarrow q) \wedge \sim q) \rightarrow \\
 \sim p
 \end{array}$$

$p$	$q$	$\sim p$	$\sim q$	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge \sim q$	$((p \rightarrow q) \wedge \sim q) \rightarrow \sim p$
И	И	Л	Л	И	Л	И
И	Л	Л	И	Л	Л	И
Л	И	И	Л	И	Л	И
Л	Л	И	И	И	И	И

$$\frac{A \rightarrow B}{A}$$

?

A	B	$A \rightarrow B$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	И
Л	Л	И

MODUS TOLENDO PONENS	$\frac{A \vee B}{\sim A}$ $B$	$((A \vee B) \wedge \sim A) \rightarrow B$
-------------------------	-------------------------------	--

MODUS PONENDO TOLLENS	$\frac{A \leftrightarrow B}{A}$ $\sim B$	$((A \leftrightarrow B) \wedge A) \rightarrow \sim B$
--------------------------	--	---

A	B	$\sim A$	$\sim B$	$A \vee B$	$A \leftrightarrow B$
И	И	Л	Л	И	Л
И	Л	Л	И	И	И
Л	И	И	Л	И	И
Л	Л	И	И	Л	Л

<p>ПРОСТАЯ КОНСТРУКТИВНАЯ ДИЛЕММА</p>	$\begin{array}{l} A \rightarrow B \\ C \rightarrow B \\ \hline A \vee C \\ \hline B \end{array}$	$((A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow B) \wedge (A \vee C)) \rightarrow B$
<p>СЛОЖНАЯ КОНСТРУКТИВНАЯ ДИЛЕММА</p>	$\begin{array}{l} A \rightarrow B \\ C \rightarrow D \\ \hline A \vee C \\ \hline B \vee D \end{array}$	$((A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \wedge (A \vee C)) \rightarrow (B \vee D)$
<p>ПРОСТАЯ ДЕСТРУКТИВНАЯ ДИЛЕММА</p>	$\begin{array}{l} A \rightarrow B \\ A \rightarrow D \\ \hline \sim B \vee \sim D \\ \hline \sim A \end{array}$	$((A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow D) \wedge (\sim B \vee \sim D)) \rightarrow \sim A$
<p>СЛОЖНАЯ ДЕСТРУКТИВНАЯ ДИЛЕММА</p>	$\begin{array}{l} A \rightarrow B \\ C \rightarrow D \\ \hline \sim B \vee \sim D \\ \hline \sim A \vee \sim C \end{array}$	$((A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \wedge (\sim B \vee \sim D)) \rightarrow (\sim A \vee \sim C)$

«Если ваши книги согласуются с Кораном, то они излишни.  
Если ваши книги не согласуются с Кораном, то они вредны.  
Но они либо согласуются с Кораном, либо нет.  
Следовательно,  
они либо излишни, либо вредны»

СЛОЖНАЯ  
КОНСТРУКТИВНАЯ  
ДИЛЕММА

$$\begin{array}{l} A \rightarrow B \\ C \rightarrow D \\ A \vee C \\ \hline B \vee D \end{array}$$

$$((A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \wedge (A \vee C)) \rightarrow (B \vee D)$$

Зенон:

Если тело находится в движении, то оно должно двигаться или там, где оно есть, или там, где его нет.

Но тело не может двигаться ни там, где оно есть, ни там, где его нет.

Следовательно,

оно вообще не может двигаться, т.е. движение невозможно»

ПРОСТАЯ  
ДЕСТРУКТИВНАЯ  
ДИЛЕММА ?

$$\frac{p \rightarrow (q \vee r) \\ \sim (q \vee r)}{\sim p}$$

$$((p \rightarrow (q \vee r)) \wedge \sim (q \vee r)) \rightarrow \sim p$$

$$A \rightarrow B$$

$$\sim B$$

$$\sim A$$

$$((A \rightarrow B) \wedge \sim B) \rightarrow$$

$$\sim A$$

Modus Tollens