Предельные теоремы

Подготовили студенты
Группы Ю-103
Казьмин Георгий и Трунин Сергей

ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

В узком смысле слова под законом больших чисел понимается ряд математических теорем, которые утверждают приближение средних характеристик большого числа опытов к некоторым постоянным величинам.

В широком смысле этот закон утверждает, что при очень большом числе случайных явлений их средний результат перестает быть случайным и может быть предсказан с большой степенью вероятности.

НЕРАВЕНСТВО ЧЕБЫШЕВА

Пусть X - случайная величина с мат. ожиданием m_x и дисперсией D_x. Тогда для любого ε>0 вероятность того, что случайная величина X отклонится от своего мат. ожидания больше, чем на ε, ограничена сверху величиной D_x / ε^2

$$p\left(\left|X - m_x\right| > \varepsilon\right) \le \frac{D_x}{\varepsilon^2}$$

НЕРАВЕНСТВО ЧЕБЫШЕВА

Доказательство:

Предположим, что случайная величина *X* дискретна и ее ряд распределения имеет вид:

x_i	x_1	x_2	…	x_n
p_i	p_1	p_2	…	p_n

Запишем дисперсию этой СВ:

$$D[X] = M[(X - m_x)^2] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^2 \cdot p_i$$

Оставим в этой сумме только те слагаемые, которые отвечают условию

$$|x_i - m_x| > \varepsilon$$

Тогда дисперсия окажется больше полученной суммы:

$$D[X] \geq \sum_{|x_i - m_x| > \varepsilon} (x_i - m_x)^2 p_i$$

Делаем замену:

$$(x_i - m_x)^2 \to \varepsilon^2$$

Тогда неравенство сохраняется:

$$D[X] \geq \sum_{|x_i - m_x| > \varepsilon} \varepsilon^2 \cdot p_i = \varepsilon^2 \cdot \sum_{|x_i - m_x| > \varepsilon} p_i$$

Последняя сумма представляет собой вероятность события, что разность СВ *X* и ее математического ожидания будет больше ε:

$$\sum_{|x_i - m_x| > \varepsilon} p_i = p(|X - m_x| > \varepsilon)$$

Следовательно неравенство примет вид:

$$D_x \geq \varepsilon^2 \cdot p(|X - m_x| > \varepsilon)$$

Откуда окончательно получаем:

$$\boxed{p(|X - m_x| > \varepsilon) \leq \frac{D_x}{\varepsilon^2}}$$

ТЕОРЕМА ЧЕБЫШЕВА

Пусть X -СВ с математическим ожиданием а и дисперсией d. Будем проводить серии из n независимых опытов и вычислять среднее арифметическое Y_n значений, принятых СВ в этих опытах. Тогда для любого ε>0 вероятность того, что отклонение среднего арифметического от мат. ожидания будет больше, чем ε, будет стремиться к нулю при неограниченном возрастании числа опытов в каждой серии :

$$p(|Y_n - a| > \varepsilon) \to 0, \quad n \to \infty$$

КОММЕНТАРИЙ

Если проводятся серии из n опытов, то от одной серии к другой, среднее арифметическое СВ будет меняться случайным образом. Значения среднего арифметического будут отличаться от математического ожидания. Но при увеличении длины серий это отличие будет уменьшаться и при n стремящемся к бесконечности, разница между средним арифметическим и мат. ожиданием будет стремиться к нулю.

Говорят, что при достаточно большом числе опытов среднее арифметическое наблюдаемых значений случайной величины <u>сходится по вероятности</u> к ее математическому ожиданию. Это значит, что при стремлении n к бесконечности вероятность того, что среднее арифметическое и мат. ожидание будут сколь угодно близки, стремиться к единице.

Доказательство:

Пусть X_i - значение, принятое случайной величиной X в i-ом опыте.

Чтобы найти среднее арифметическое значений X в серии из n опытов, нужно сложить все значения, полученные в опытах, и разделить на число этих опытов:

$$Y_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

По свойству математического ожидания выразим мат. ожидание Y_n через мат. ожидание X_i:

$$M[Y_n] = M\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M[X_i]$$

Все величины X_i распределены как случайная величина X. Следовательно,

$$\mathbf{M[X_i]=M[X]=}\boldsymbol{a}$$

$$M[Y_n] = \frac{1}{n}\cdot n\cdot a = a$$

Так как опыты проводятся независимо, то случайные величины X_i следовательно, для дисперсии величины Y_n имеем:

$$D[Y_n] = D\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D[X_i]$$

Все величины X_i распределены как случайная величина X. Следовательно,

$$\mathbf{D[X_i]=D[X]=d}$$

$$D[Y_n] = \frac{1}{n^2}\cdot n \cdot d = \frac{d}{n}$$

Применим неравенство Чебышева:

$$p(|X - m_x| > \varepsilon) \le \frac{D_x}{\varepsilon^2}$$

В качестве СВ X подставим Y_n :

$$p\left(\left|Y_n - M[Y_n]\right| > \varepsilon\right) \le \frac{D[Y_n]}{\varepsilon^2}$$

Подставляем найденное значение математического ожидания и дисперсии:

$$p\left(\left|Y_n - a\right| > \varepsilon\right) \le \frac{d}{n \cdot \varepsilon^2}$$

Величина $\frac{d}{n \cdot \varepsilon^2} \to 0$ **при** $n \to \infty$

следовательно

$$\boxed{p\left(\left|Y_n - a\right| > \varepsilon\right) \to 0 \quad при \quad n \to \infty}$$

Следствием закона больших чисел является теорема Я. Бернулли.

Она устанавливает связь между частотой события и его вероятностью.

ТЕОРЕМА БЕРНУЛЛИ

Пусть событие А происходит в опыте с вероятностью р. Будем проводить серии из n независимых опытов и вычислять частоту γ_n наступления события А в этих сериях. Тогда для любого ε>0 вероятность того, что отклонение частоты события от его вероятности будет больше, чем ε, будет стремиться к нулю при не ограниченном возрастании числа опытов в каждой серии:

$$p(|\gamma_n - p| > \varepsilon) \to 0, \quad n \to \infty$$

<u>КОММЕНТАРИЙ</u>

Если проводятся серии из n опытов, то от одной серии к другой, частота события будет меняться случайным образом и не будет совпадать с вероятностью этого события. Но при увеличении длины серий это отличие будет уменьшаться и при n стремящемся к бесконечности, разница между частотой и вероятностью будет стремится к нулю. Говорят, что при достаточно большом числе опытов частота события <u>сходится по вероятности</u> к вероятности данного события.

Доказательство:

Пусть *X* - случайная величина, которая равна 1, если событие *A* произошло в опыте и равна 0, если событие *A* не произошло.

Ряд распределения этой СВ будет иметь вид:

x_i	1	0
p_i	p	q

Тогда математическое ожидание и дисперсия *X* будут соответственно равны:

$$M[X]=p, \quad D[X]=pq.$$

Частота γ_n представляет собой величину

$$\gamma_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

А это есть среднее арифметическое величины. Согласно закону больших чисел эта величина сходится по вероятности к математическому ожиданию.

Поэтому

$$p(|\gamma_n - p| > \varepsilon) \to 0, \quad n \to \infty$$

ЦПТ устанавливает условия, при которых возникает самый распространенный закон распределения - нормальный закон.

Он возникает во всех случаях, когда исследуемая случайная величина может быть представлена в виде суммы достаточно большого числа независимых (или слабо зависимых) слагаемых, каждое из которых в отдельности слабо влияет на сумму.

Например, отклонение от цели при стрельбе вызывается ошибкой наводки, ошибкой в определении дальности, вибрацией оружия, атмосферными условиями и пр.

Поэтому отклонение снаряда от цели обусловлено суммой всех элементарных отклонений.

Поскольку этих факторов очень много и они в основном являются независимыми и приблизительно равными по действию, то согласно центральной предельной теореме, общее отклонение снаряда должно подчиняться распределению Гаусса.

Если X_1, X_2... X_n - независимые случайные величины, имеющие один и тот же закон распределения с математическим ожиданием, равным m, и дисперсией σ^2, то при неограниченном увеличении n закон распределения суммы

$$Z_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

неограниченно приближается к нормальному закону распределения.

Практически, ЦПТ можно пользоваться, когда число слагаемых в сумме невелико, порядка 10 или еще меньше.

ЦПТ часто применяют для нахождения вероятности того, что сумма нескольких случайных величин окажется в заданных пределах.

Если X_1 X_2... X_n - независимые случайные величины, с математическими ожиданиями

$$m_1\ m_2 \ldots m_n$$

и дисперсиями

$$D_1\ D_2 \ldots D_n$$

и выполняются условия ЦПТ, то вероятность того, что случайная величина

$$Z = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

попадает в интервал от α до β выражается формулой

$$p(\alpha < Z < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - m_z}{\sigma_z}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m_z}{\sigma_z}\right)$$

где m_z , σ_z - математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение случайной величины Z, Ф - функция Лапласа.

$$m_z = \sum_{i=1}^{n} m_i \qquad \sigma_z = \sqrt{D_z} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} D_i}$$

То есть, чтобы приближенно найти вероятность попадания суммы большого числа случайных величин на заданный участок, не требуется знать законы распределения этих величин - достаточно лишь знать их характеристики.

На практике часто применяются формулы, в которых вместо суммы случайных величин Xi фигурирует их нормированная сумма:

$$Y = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} m_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} D_i}}$$

Если закон распределения величины Z близок к нормальному с параметрами m_z σ_z , то закон распределения величины Y близок к нормальному с параметрами

$$M[Y]=0, \quad D[Y]=\sigma_y=1.$$

Тогда

$$p(\alpha < Y < \beta) = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha)$$

ЦПТ может применяться не только к непрерывным, но и к дискретным случайным величинам, если оперировать не плотностями вероятности, а функциями распределения.

Если величины X_1 X_2... X_n – дискретны, то их сумма тоже дискретная случайная величина.

Строго говоря, она не может подчиняться нормальному распределению.

Но все полученные формулы остаются в силе, так как в них фигурируют не плотности, а функции распределения.

Т.е., если дискретные величины удовлетворяют условиям ЦПТ, то функция распределения их нормированной суммы при увеличении числа n неограниченно приближается к нормальной функции распределения с параметрами (0,1).

Сумма величин $Z_{90}=\Sigma X_i$ за квартал будет распределена по нормальному закону с параметрами

$$M[Z_{90}]=20\cdot 90=1800,\ D[Z_{90}]= 200\cdot 90=18000$$

Следовательно,

$$\sigma[Z_{90}]=134$$

Находим искомую вероятность:

$$p(Z_{90} < 2000) = p(-\infty < Z_{90} < 2000) =$$

$$= \Phi\left(\frac{2000-1800}{134}\right) - \Phi(-\infty) \approx 0.93$$

Частным случаем ЦПТ для дискретных случайных величин является

ТЕОРЕМА МУАВРА-ЛАПЛАСА

Пусть событие A происходит с вероятностью p. Будем проводить серии из n опытов и считать число k наступления события A в таких сериях. Тогда при большом n справедлива формула:

$$p(k_1 \le k \le k_2) \approx \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

где $q=1-p$.