

## *Лекция 24*

*Тема: Электроемкость.  
Конденсаторы. Энергия  
электростатического поля.*

Рассмотрим **уединенный проводник**, т. е. проводник, который удален от других проводников, тел и зарядов. Его потенциал, согласно ( $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$ ), прямо пропорционален заряду проводника. Из опыта следует, что разные проводники, будучи одинаково заряженными, имеют различные потенциалы. Поэтому для уединенного проводника можно записать

Величину 
$$Q = C\varphi.$$

$$(1) C = Q/\varphi$$

называют **емкостью** (или просто **емкостью**) уединенного проводника. Емкость уединенного проводника определяется зарядом, сообщением которого проводнику изменяет его потенциал на единицу.

Емкость проводника зависит от его размеров и формы, но не зависит от материала, агрегатного состояния, формы и размеров полостей внутри проводника. Это связано с тем, что избыточные заряды распределяются на внешней поверхности проводника. Емкость не зависит также ни от заряда проводника, ни от его потенциала.

Единица емкости — **фарад (Ф)**: 1 Ф — емкость такого уединенного проводника, потенциал которого изменяется на 1 В при сообщении ему заряда 1 Кл.

Согласно ( $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$ ), потенциал уединенного шара радиуса  $R$ , находящегося в однородной среде с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ , равен

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\epsilon R}$$

Используя формулу (93.1), получим, что емкость шара

$$C = 4\pi\epsilon_0\epsilon R.$$

Отсюда следует, что емкостью 1 Ф обладал бы уединенный шар, находящийся в вакууме и имеющий радиус  $R = C/(4\pi\epsilon_0) \approx 9 \cdot 10^6$  км, что примерно в 1400 раз больше радиуса Земли (емкость Земли  $C \approx 0,7$  мФ). Следовательно, фарад — очень большая величина, поэтому на практике используются дольные единицы — миллифарад (мФ), микрофарад (мкФ), нанофарад (нФ), пикофарад (пФ). Из формулы (  $C = 4\pi\epsilon_0\epsilon R$  ) вытекает также, что единица электрической постоянной  $\epsilon_0$  — *фарад на метр* (Ф/м).

Как видно, для того чтобы проводник обладал большой емкостью, он должен иметь очень большие размеры. На практике, однако, необходимы устройства, обладающие способностью при малых размерах и небольших относительно окружающих тел потенциалах накапливать значительные по величине заряды, иными словами, обладать большой емкостью. Эти устройства получили название **конденсаторов**.

Если к заряженному проводнику приближать другие тела, то на них возникают индуцированные (на проводнике) или связанные (на диэлектрике) заряды, причем ближайшими к наводящему заряду  $Q$  будут заряды противоположного знака. Эти заряды, естественно, ослабляют поле, создаваемое зарядом  $Q$ , т. е. понижают потенциал проводника, что приводит (  $C = Q/\varphi$  ) к повышению его емкости.

Конденсатор состоит из двух проводников (обкладок), разделенных диэлектриком. На емкость конденсатора не должны оказывать влияния окружающие тела, поэтому проводникам придают такую форму, чтобы поле, создаваемое накапливаемыми зарядами, было сосредоточено в узком зазоре между обкладками конденсатора. Этому условию удовлетворяют: 1) две плоские пластины; 2) два коаксиальных цилиндра; 3) две концентрические сферы. Поэтому в зависимости от формы обкладок конденсаторы делятся на **плоские, цилиндрические и сферические**.

Так как поле сосредоточено внутри конденсатора, то линии напряженности начинаются на одной обкладке и кончаются на другой, поэтому свободные заряды, возникающие на разных обкладках, являются равными по модулю разноименными зарядами. Под **емкостью конденсатора** понимается физическая величина, равная отношению заряда  $Q$ , накопленного в конденсаторе, к разности потенциалов ( $\phi_1 - \phi_2$ ) между его обкладками:

$$C = Q / (\phi_1 - \phi_2). \quad (3)$$

Рассчитаем емкость плоского конденсатора, состоящего из двух параллельных металлических пластин площадью  $S$  каждая, расположенных на расстоянии  $d$  друг от друга и имеющих заряды  $+Q$  и  $-Q$ . Если расстояние между пластинами мало по сравнению с их линейными размерами, то краевыми эффектами можно пренебречь и поле между обкладками считать однородным.

Его можно рассчитать используя формулы (  $\varphi_1 - \varphi_2 = \int_0^d E dx = \int_0^d \frac{\sigma}{\epsilon_0} dx = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d$  ) и (  $C = Q/(\varphi_1 - \varphi_2)$  ).  
 При наличии диэлектрика между обкладками разность потенциалов между ними, согласно (  $\varphi_1 - \varphi_2 = \int_0^d E dx = \int_0^d \frac{\sigma}{\epsilon_0} dx = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d$  ):  $\varphi_1 - \varphi_2 = \sigma d / (\epsilon_0 \epsilon)$ , (4)

где  $\epsilon$  — диэлектрическая проницаемость. Тогда из формулы (94.1), заменяя  $Q = \sigma S$ , с учетом (  $\varphi_1 - \varphi_2 = \sigma d / (\epsilon_0 \epsilon)$  ) получим выражение для емкости плоского конденсатора:

$$C = \epsilon_0 \epsilon S / d. \quad (5)$$

Для определения емкости цилиндрического конденсатора, состоящего из двух полых коаксиальных цилиндров с радиусами  $r_1$  и  $r_2$  ( $r_2 > r_1$ ), вставленных один в другой, опять пренебрегая краевыми эффектами, считаем поле радиально-симметричным и сосредоточенным между цилиндрическими обкладками. Разность потенциалов между обкладками вычислим по формуле (

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

цилиндра с линейной плотностью  $\tau = Q/l$  ( $l$  — длина обкладок). При наличии диэлектрика между обкладками разность потенциалов

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 \epsilon} \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 \epsilon l} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (6)$$

Подставив (6) в (3), получим выражение для емкости цилиндрического конденсатора:

$$C = 2\pi\epsilon_0 \epsilon l / \ln (r_2 / r_1). \quad (7)$$

Для определения емкости сферического конденсатора, состоящего из двух концентрических обкладок, разделенных сферическим слоем диэлектрика, используем формулу (  $\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$  ) для разности потенциалов между двумя точками, лежащими на расстояниях  $r_1$  и  $r_2$  ( $r_2 > r_1$ ) от центра заряженной сферической поверхности. При наличии диэлектрика между обкладками рази

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (8)$$

Подставив (8) в (3), получим

$$C = 4\pi\epsilon_0\epsilon \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}. \quad (9)$$

Если  $d = r_2 - r_1 \ll r_1$ , то  $r_2 \approx r_1 \approx r$  и  $C = 4\pi\epsilon_0\epsilon r^2/d$ . Так как  $4\pi r^2$  — площадь сферической обкладки, то получаем формулу (5). Таким образом, при малой величине зазора по сравнению с радиусом сферы выражения для емкости сферического а плоского конденсаторов совпадают. Этот вывод справедлив и для цилиндрического конденсатора: при малом зазоре между цилиндрами по сравнению с их радиусами в формуле (7)  $\ln(r_2/r_1)$  можно разложить в ряд, ограничиваясь только членом первого порядка. В результате опять приходим к формуле (5).

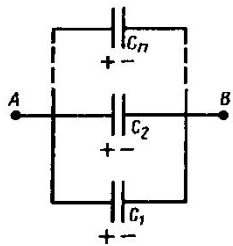
Из формул (5), (7) и (9) вытекает, что емкость конденсаторов любой формы прямо пропорциональна диэлектрической проницаемости диэлектрика, заполняющего пространство между обкладками.

Поэтому применение в качестве прослойки сегнетоэлектриков значительно увеличивает емкость конденсаторов.

Конденсаторы характеризуются **пробивным напряжением** — разностью потенциалов между обкладками конденсатора, при которой происходит **пробой** — электрический разряд через слой диэлектрика в конденсаторе. Пробивное напряжение зависит от формы обкладок, свойств диэлектрика и его толщины.

Для увеличения емкости и варьирования ее возможных значений конденсаторы соединяют в батареи, при этом используется их параллельное и последовательное соединения.

**1. Параллельное соединение конденсаторов** (рис. 1). У параллельно соединенных конденсаторов разность потенциалов на об



конденсаторов одинакова и равна  $\phi_A - \phi_B$ . Если емкости отдельных конденсаторов  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , то, согласно (3), их заряды равны

$$Q_1 = C_1 (\phi_A - \phi_B),$$

$$Q_2 = C_2 (\phi_A - \phi_B),$$

$$\dots$$

$$Q_n = C_n (\phi_A - \phi_B),$$

Рисунок 1

а заряд батареи конденсаторов

$$Q = \sum_{i=1}^n Q_i = (C_1 + C_2 + \dots + C_n) (\phi_A - \phi_B).$$

Полная емкость батареи

$$C = Q / (\phi_A - \phi_B) = C_1 + C_2 + \dots + C_n = \sum_{i=1}^n C_i.$$

т. е. при параллельном соединении конденсаторов она равна сумме емкостей отдельных конденсаторов.

**2. Последовательное соединение конденсаторов** (рис. 2). У последовательно соединенных конденсаторов заряды всех обкладок равны по модулю, а разность потенциалов на зажимах батареи

$$\Delta\varphi = \sum_{i=1}^n \Delta\varphi_i,$$

где для любого из рассматриваемых конденсаторов  $\Delta\varphi_i = Q/C_i$ . С другой стороны,

$$\Delta\varphi = Q/C = Q \sum_{i=1}^n (1/C_i),$$

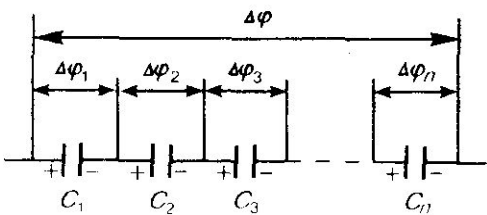


Рисунок 2

откуда

$$1/C = \sum_{i=1}^n (1/C_i),$$

т. е. при последовательном соединении конденсаторов суммируются величины, обратные емкостям. Таким образом, при последовательном соединении конденсаторов результирующая емкость  $C$  всегда меньше наименьшей емкости, используемой в батарее.



Преобразуем формулу (  $W = C (\Delta\phi)^2/2 = Q\Delta\phi/2 = Q^2/(2C)$ , ), выражающую энергию плоского конденсатора посредством зарядов и потенциалов, воспользовавшись выражением для емкости плоского конденсатора ( $C = \epsilon_0 \epsilon S/d$ ) и разности потенциалов между его обкладками ( $\Delta\phi = Ed$ ). Тогда

$$W = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} Sd = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} V, \quad (10)$$

где  $V = Sd$  — объем конденсатора. Формула (10) показывает, что энергия конденсатора выражается через величину, характеризующую электростатическое поле, — напряженность  $E$ .

**Объемная плотность** энергии электростатического поля (энергия единицы объема)

$$w = W/V = \epsilon_0 \epsilon E^2/2 = ED/2.$$

Выражение (11) справедливо только для **изотропного диэлектрика**, для которого выполняется соотношение :  $\mathbf{P} = \square \epsilon_0 \mathbf{E}$ .

Формулы (  $W = C (\Delta\phi)^2/2 = Q\Delta\phi/2 = Q^2/(2C)$ , ) и (10) соответственно связывают энергию конденсатора с зарядом на его обкладках и с напряженностью поля. Возникает, естественно, вопрос о локализации электростатической энергии и что является ее носителем — заряды или поле? Ответ на этот вопрос может дать только опыт. Электростатика изучает постоянные во времени поля неподвижных зарядов, т. е. в ней поля и обусловившие их заряды неотделимы друг от друга.

Поэтому электростатика ответить на поставленные вопросы не может. Дальнейшее развитие теории и эксперимента показало, что переменные во времени электрические и магнитные поля могут существовать обособленно, независимо от возбудивших их зарядов, и распространяются в пространстве в виде электромагнитных волн, *способных* переносить энергию. Это убедительно подтверждает основное положение *теории близкодействия о том, что энергия локализована в поле* и что носителем энергии является *поле*.