

Лекция 22

*Тема: Принцип суперпозиций
электростатических полей.
Теорема Гаусса. Разность
потенциалов*

Рассмотрим метод определения модуля и направления вектора напряженности \mathbf{E} в каждой точке электростатического поля, создаваемого системой неподвижных зарядов Q_1, Q_2, \dots, Q_n .

Опыт показывает, что к кулоновским силам применим рассмотренный в механике принцип независимости действия сил, т. е. результирующая сила \mathbf{F} , действующая со стороны поля на пробный заряд Q_0 , равна векторной сумме сил \mathbf{F}_i , приложенных к нему со стороны каждого из зарядов Q_i :

$$(1) \quad \mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i.$$

Согласно ($\mathbf{E} = \mathbf{F}/Q_0$), $\mathbf{F} = Q_0\mathbf{E}$ и $\mathbf{F}_i = Q_0\mathbf{E}_i$, где \mathbf{E} — напряженность результирующего поля, а \mathbf{E}_i — напряженность поля, создаваемого зарядом Q_i . Подставляя последние выражения в (1), получаем

$$(2) \quad \mathbf{E} = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i.$$

Формула (2) выражает **принцип суперпозиции (наложения) электростатических полей**, согласно которому напряженность \mathbf{E} результирующего поля, создаваемого системой зарядов, равна *геометрической сумме* напряженностей полей, создаваемых в данной точке каждым из зарядов в отдельности.

Принцип суперпозиции позволяет рассчитать электростатические поля любой системы неподвижных зарядов, поскольку если заряды не точечные, то их можно всегда свести к совокупности точечных зарядов.

Принцип суперпозиции применим для расчета электростатического поля электрического диполя. **Электрический диполь** — система двух равных по модулю разноименных точечных зарядов $(+Q, -Q)$, расстояние l между которыми значительно меньше расстояния до рассматриваемых точек поля. Вектор, направленный по оси диполя (прямой, проходящей через оба заряда) от отрицательного заряда к положительному и равный расстоянию между ними, называется **плечом диполя \mathbf{l}** . Вектор

$$\mathbf{p} = |Q| \mathbf{l},$$

совпадающий по направлению с плечом диполя и равный произведению заряда $|Q|$ на плечо \mathbf{l} , называется **электрическим моментом диполя** или **дипольным моментом** (рис. 1).

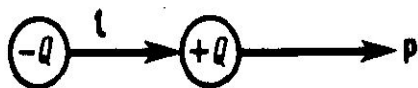


Рисунок 1

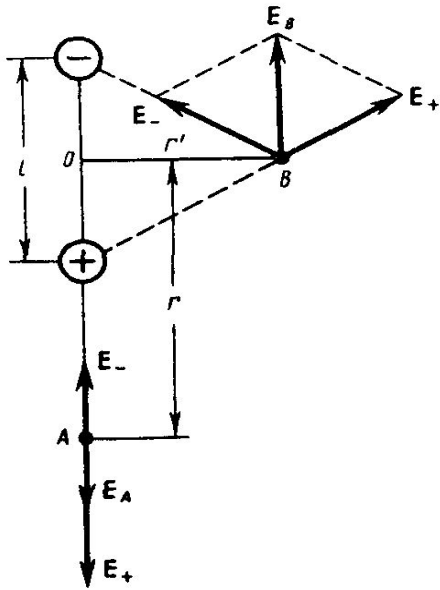
Согласно принципу суперпозиции (2), напряженность E поля диполя в произвольной точке

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_-,$$

где E_+ и E_- — напряженности полей, создаваемых соответственно положительным и отрицательным зарядами. Воспользовавшись этой формулой, рассчитаем напряженность поля в произвольной точке на продолжении оси диполя и на перпендикуляре к середине его оси.

1. Напряженность поля на продолжении оси диполя в точке A (рис. 2). Как видно из рисунка, напряженность поля диполя в точке A направлена по оси диполя и по модулю равна

$$E_A = E_+ - E_-.$$



Обозначив расстояние от точки A до середины оси диполя через r , на основании формулы

($E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$ или $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$) для вакуума можно записать

$$E_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{(r-l/2)^2} - \frac{Q}{(r+l/2)^2} \right] = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(r+l/2)^2 - (r-l/2)^2}{(r-l/2)^2 (r+l/2)^2}.$$

Согласно определению диполя, $l/2 \ll r$, поэтому

$$E_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Ql}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p}{r^3}.$$

Рисунок 2

2. Напряженность поля на перпендикуляре, восставленном к оси из его середины, в точке B (рис. 2). Точка B равноудалена от зарядов, поэтому

$$E_+ = E_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{(r')^2 + l^2/4} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{(r')^2}, \quad (4)$$

где r' — расстояние от точки B до середины плеча диполя. Из подобия равнобедренных треугольников, опирающихся на плечо диполя и вектор E_B , получим

$$\frac{E_B}{E_+} = \frac{l}{\sqrt{(r')^2 + (l/2)^2}} \approx \frac{l}{r'}$$

откуда

$$(5) \quad E_B = E_+ l / r'$$

Подставив в выражение (5) значение (4), получим

$$E_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ql}{(r')^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{(r')^3}$$

Вектор E_B имеет направление, противоположное вектору электрического момента диполя (вектор p направлен от отрицательного заряда к положительному).

Вычисление напряженности поля системы электрических зарядов с помощью принципа суперпозиции электростатических полей можно значительно упростить, используя выведенную немецким ученым К. Гауссом (1777—1855) теорему, определяющую поток вектора напряженности электрического поля сквозь произвольную замкнутую поверхность.

В соответствии с формулой ($\Phi_E = \oint_S E_n dS = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$,) поток вектора напряженности сквозь сферическую поверхность радиуса r , охватывающую точечный заряд Q , находящийся в ее центре (рис. 3), равен

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}.$$

Этот результат справедлив для замкнутой поверхности любой формы. Действительно, если окружить сферу (рис. 3) произвольной замкнутой поверхностью, то каждая линия напряженности, пронизывающая сферу, пройдет и сквозь эту поверхность.

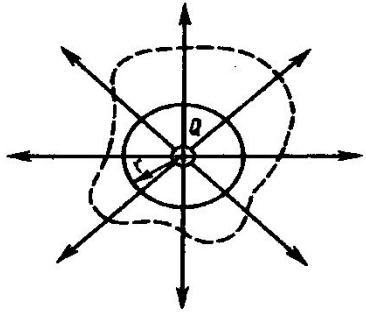


Рисунок 3

Если замкнутая поверхность произвольной формы охватывает заряд (рис. 4), то при пересечении любой выбранной линии напряженности с поверхностью она то входит в нее, то выходит из нее. Нечетное число пересечений при вычислении потока в конечном счете сводится к одному пересечению, так как поток считается положительным, если линии напряженности выходят из поверхности, и отрицательным для линий, входящих в поверхность. Если замкнутая поверхность не охватывает заряда, то поток сквозь нее равен нулю, так как число линий напряженности, входящих в поверхность, равно числу линий напряженности, выходящих из нее.

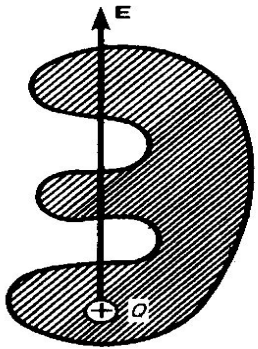


Рисунок 4

Таким образом, для поверхности любой формы, если она замкнута и заключает в себя точечный заряд Q , поток вектора \mathbf{E} будет равен Q/ϵ_0 , т. е.

$$\Phi_{\mathbf{E}} = \oint_S \mathbf{E} \, d\mathbf{S} = \oint_S E_n \, dS = Q/\epsilon_0. \quad (6)$$

Знак потока совпадает со знаком заряда Q .

Рассмотрим общий случай произвольной поверхности, окружающей n зарядов. В соответствии с принципом суперпозиции напряженность \mathbf{E} поля, создаваемого всеми зарядами, равна сумме напряженностей E_i полей, создаваемых каждым зарядом в отдельности: $\mathbf{E} = \sum_i \mathbf{E}_i$. Поэтому

$$\Phi_{\mathbf{E}} = \oint_S \mathbf{E} \, d\mathbf{S} = \oint_S (\sum_i \mathbf{E}_i) \, d\mathbf{S} = \sum_i \oint_S \mathbf{E}_i \, d\mathbf{S}.$$

Согласно (6), каждый из интегралов, стоящий под знаком суммы, равен Q_i/ϵ_0 .

Следовательно,

$$\oint_S \mathbf{E} \, d\mathbf{S} = \oint_S E_n \, dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n Q_i. \quad (7)$$

Формула (7) выражает теорему Гаусса для электростатического поля в вакууме: поток вектора напряженности электростатического поля в вакууме сквозь произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности зарядов, деленной на ϵ_0 . Эта теорема выведена математически для векторного поля любой природы русским математиком М. В. Остроградским (1801—1862), а затем независимо от него применительно к электростатическому полю — К. Гауссом.

В общем случае электрические заряды могут быть «размазаны» с некоторой объемной плотностью $\rho = dQ/dV$, различной в разных местах пространства. Тогда суммарный заряд, заключенный внутри замкнутой поверхности S , охватывающей некоторый объем V ,

$$\sum_i Q_i = \int_V \rho dV.$$

Используя формулу (8), теорему Гаусса (7) можно записать так:

$$\oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = \oint_S E_n dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV.$$

1. Поле равномерно заряженной бесконечной плоскости определяется формулой ($E = \sigma/(2\epsilon_0)$): $E = \sigma/(2\epsilon_0)$, где σ — поверхностная плотность заряда. Разность потенциалов между точками, лежащими на расстояниях x_1 и x_2 от плоскости, равна (используем формулу ($E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}$))

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{x_1}^{x_2} E dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} dx = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (x_2 - x_1).$$

2. Поле двух бесконечных параллельных разноименно заряженных плоскостей определяется формулой ($E = \sigma/\epsilon_0$); $E = \sigma/\epsilon_0$, где σ — поверхностная плотность заряда. Разность потенциалов между плоскостями, расстояние между которыми равно d (см. формулу ($E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}$)), равна

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_0^d E dx = \int_0^d \frac{\sigma}{\epsilon_0} dx = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d. \quad 9) \quad ($$

3. Поле равномерно заряженной сферической поверхности радиуса R с общим зарядом Q вне сферы ($r > R$) вычисляется по ($E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$):

Разность потенциалов между двумя точками, лежащими на расстояниях r_1 и r_2 от центра сферы ($r_1 > R, r_2 > R, r_2 > r_1$), равна

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (10)$$

Если принять $r_1 = r$ и $r_2 = \infty$, то потенциал поля вне сферической поверхности, согласно формуле (10), задается выражением

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$$

(ср. с формулой ($\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$). Внутри сферической поверхности потенциал всюду одинаков и равен

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

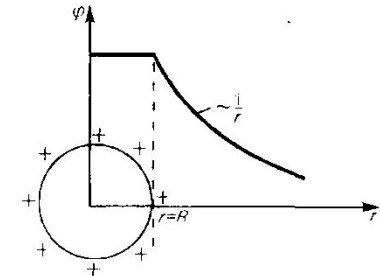


Рисунок 5

График зависимости ϕ от r приведен на рис. 5.

4. Поле объемно заряженного шара радиуса R с общим зарядом Q *вне* шара ($r > R$) вычисляется по формуле ($E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$ ($r > R$)), поэтому разность потенциалов между двумя точками, лежащими на расстояниях r_1 и r_2 от центра шара ($r_1 > R$, $r_2 > R$, $r_2 > r_1$), определяется формулой (10). В любой точке, лежащей *внутри* шара на расстоянии r' от его центра ($r' < R$), напряженность определяется выражением ($E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^3} r'$):

Следовательно, разность потенциалов между двумя точками, лежащими на расстояниях от центра шара (r'_1 и r'_2), равна

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r'_1}^{r'_2} E dr = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R^3} (r'^2_2 - r'^2_1).$$

5. Поле равномерно заряженного бесконечного цилиндра радиуса R , заряженного с линейной плотностью τ , *вне* цилиндра ($r > R$) определяется формулой ($E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\tau}{r}$):

Следовательно, разность потенциалов между двумя точками, лежащими на расстояниях r_1 и r_2 от оси заряженного цилиндра ($r_1 > R$, $r_2 > R$, $r_2 > r_1$), равна

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (11)$$

