Комбинаторика

Сидоренко Ольга
группа «СО-11»

Введение

Комбинато́рика (Комбинаторный анализ) — раздел математики, изучающий дискретные объекты, множества (сочетания, перестановки, размещения и перечисления элементов) и отношения на них (например, частичного порядка). Комбинаторика связана со многими другими областями математики — алгеброй, геометрией, теорией вероятностей и имеет широкий спектр применения в различных областях знаний (например в генетике, информатике, статистической физике).

Термин «комбинаторика» был введён в математический обиход Лейбницем, который в 1666 году опубликовал свой труд «Рассуждения о комбинаторном искусстве».

Основные формулы комбинаторики
Перестановки:

Перестановками называют комбинации, состоящие из одних и тех же n различных элементов и отличающиеся только порядком их расположения, а их число равно

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \cdot (n-1) \cdot n$$

Символ $n!$ называется факториалом и обозначает произведение всех целых чисел от 1 до n. По определению, считают, что $0!=1$, $1!=1$

Пример всех перестановок из $n = 3$ объектов (различных фигур) – на картинке справа. Согласно формуле, их должно быть ровно $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ так и получается. С ростом числа объектов количество перестановок очень быстро растет и изображать их наглядно становится затруднительно. число перестановок из 10 предметов

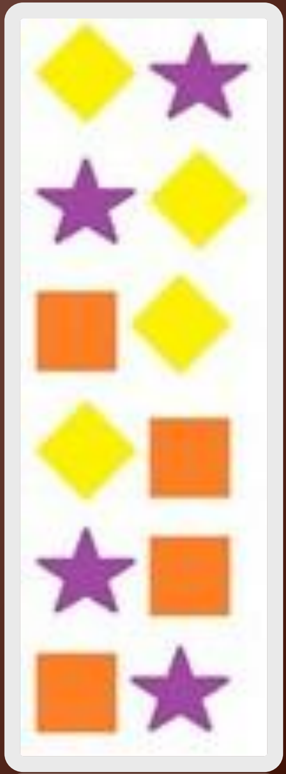
– уже **3628800** (больше 3 миллионов!).

Размещения

Размещениями называют комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются либо составом элементов, либо их порядком, а их число равно

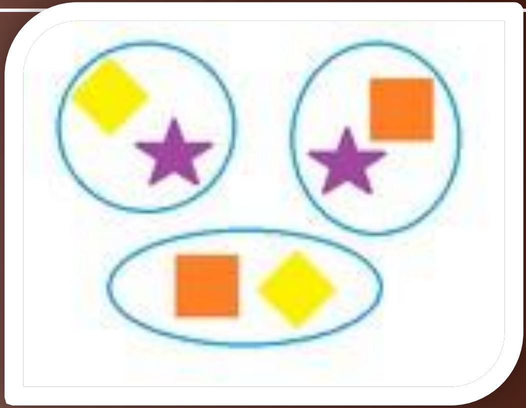
$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)$$

Пример всех размещений из $n = 3$ объектов (различных фигур) по $m = 2$ на картинке справа. Согласно формуле, их должно быть ровно $A_3^2 = 3\cdot(3-2+1) = 3\cdot 2 = 6$



Сочетания

Сочетаниями называют комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются хотя бы одним элементом, а их число равно



$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)! \cdot m}$$

Пример всех сочетаний из n = 3 объектов (различных фигур) по m = 2 на картинке справа. Согласно формуле, их должно быть ровно

$$C_3^2 = \frac{3!}{(3-2)! \cdot 2} = 3$$

Числа размещений, перестановок и сочетаний связаны равенством

$A^m_n = P_m \cdot C^m_n$

Замечание. Ранее в презентации предполагалось, что все n элементов различны. Если же некоторые элементы повторяются, то в этом случае комбинации с повторениями вычисляют по другим формулам. Например, если среди n элементов есть n_1 элементов одного вида, n_2 элементов другого вида и т.д., то число перестановок с повторениями

$$P_n = (n_1, n_2, \ldots) = \frac{n!}{(n_1!\, n_2! \ldots)}$$, где $n_1 + n_2 + \ldots = n$

При решении задач комбинаторики используют следующие правила:

Правило суммы. Если выбран один элемент, то количество комбинаций складывается.

Правило произведения. Если выбрана пара элементов, то количество комбинаций умножается.

Перестановки. Задача

Сколько четырёхзначных чисел можно составить из четырёх карточек с цифрами 0, 5, 7, 9?

Решение: *найдём количество всех возможных перестановок 4-х карточек:*

$P_4 = 4! = 24$

Когда карточка с нулём располагается на 1-м месте, то число становится трёхзначным, поэтому данные комбинации следует исключить. Пусть ноль находится на 1-м месте, тогда оставшиеся 3 цифры в младших разрядах можно переставить $P_3 = 3! = 6$ *способами.*

Примечание: *т.к. карточек немного, то здесь несложно перечислить все такие варианты:*

0579

0597

0759

0795

0957

0975

Таким образом, из предложенного набора можно составить:

24 – 6 = 18 четырёхзначных чисел

Ответ: *18*

Сочетания. Задача

Сколькими способами из колоды в 36 карт можно выбрать 3 карты?

Решение: $C_{36}^{3} = \frac{36!}{33! \cdot 2!} = \frac{33! \cdot 34 \cdot 35 \cdot 36}{33! \cdot 3!} = \frac{34 \cdot 35 \cdot 36}{6} = 7140$

способами можно выбрать 3 карты из 36-ти.

Ответ: *7140*

Размещения. Задача

В студенческой группе 23 человека. Сколькими способами можно выбрать старосту и его заместителя?

***Решение**:* $A_{23}^2 = 22 \cdot 23 = 506$ *способами.*

***Другой вариант решения**:* C_{23}^2 *способами можно выбрать 2-х человек из группы и* $P_2 = 2! = 2$ *способами распределить должности в каждой выборке. Таким образом, старосту и его заместителя можно*

$$C_{23}^2 \cdot P_2 = \frac{23!}{21! \cdot 2!} \cdot 2! = 22 \cdot 23 = 506$$

выбрать способами.

***Ответ**: 506*

Спасибо за просмотр!