Игры с природой

Подготовили:
студентки 3 курса
экономического ф-
та
группы М112б(ПМ)
Поронник Елена
Жарикова Полина

Отличительная особенность игры с природой состоит в том, что в ней имеется один активный игрок (игрок 1), а игрок 2 (природа) не действует сознательно против игрока 1 (по образному выражению А. Эйнштейна, природа сложна, но не злонамеренна), а выступает как не имеющий конкретной цели партнер по игре, который выбирает свои ходы случайным образом. Термин «природа» характеризует некую объективную действительность.

Природа может принимать одно из своих возможных состояний и не имеет целью получение выигрыша.

Игра с природой представляется в виде платежной матрицы, элементы которой – выигрыши игрока А, но не являются проигрышами природы П.

А/П	$П_1$	$П_2$	$П_3$	….	$П_n$
$А_1$	a_{11}	a_{12}	a_{13}		a_{1n}
$А_2$	a_{21}	a_{22}	a_{23}		a_{2n}
….					
$А_m$	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}		a_{mn}

aij – выигрыш игрока 1 при выборе им i-й стратегии, а игроком 2 – j-й стратегии ($i = 1,2,\ldots,m$; $j = 1,2,\ldots,n$).

Следует сразу отметить, что мажорирование стратегий в игре с природой имеет определенную специфику: исключать из рассмотрения можно лишь доминируемые стратегии 1-го игрока.

А/П	$П_1$	$П_2$	$П_3$	….	$П_n$
A_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}		a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}		a_{2n}
….					
A_m	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}		a_{mn}

Если для всех j = 1,2,…,n выполняется условие aqj ≤ akj, то q-ю стратегию игрока 1 можно не рассматривать и удалить из матрицы А. Столбцы же, которые отвечают стратегиям игрока 2 (природы) исключать из матрицы игры А недопустимо, т.к. природа не стремится к выигрышу и для нее нет целенаправленно выигрышных или проигрышных стратегий. С одной стороны отсутствие противодействия упрощает игроку 1 задачу выбора решения, но имеет место проблема обоснования выбора, так как гарантированный результат не известен.

Методы принятия решений в играх с природой зависят от характера неопределенности в поведении игрока 2, т.е. от того, известны или нет вероятности состояний (стратегий) природы. В первом случае мы имеем ситуацию риска, а во втором – полной неопределенности. В силу этого иногда игру с природой задают не в виде матрицы выигрышей, а в виде матрицы рисков или матрицы упущенных возможностей .

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{mn} \end{pmatrix}$$

Риском rij игрока 1 при использовании им i-й стратегии и при j-м состоянии среды (природы) называется разность между выигрышем, который игрок получил бы, если бы он знал, что наступит j-е состояние среды и выигрышем, который игрок получит, не обладая этой информацией. Зная j-е состояние природы, игрок выбирает ту стратегию, при которой его выигрыш максимален, т.е.

$$r_{ij} = \beta_j - a_{ij} = \max_{1 \le i \le m} a_{ij} - a_{ij}$$

Например, для матрицы выигрышей

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 7 \\ 4 & 2 & 9 & 1 \\ 3 & 5 & 8 & 6 \\ 6 & 4 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

b1= 6; b2= 5;
b3= 9; b4= 7.

Поэтому матрица рисков

$$R = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 8 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ ПОЛНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

В данной ситуации используются следующие критерии:

- ***максимакса,***
- ***Вальда,***
- ***Сэвиджа,***
- ***Гурвица***.

Рассмотрим подробнее критерии максимакса, Вальда и Сэвиджа.

Критерий максимакса (критерий крайнего оптимизма)

определяет стратегию, максимизирующую максимальные выигрыши для каждого состояния природы. Наилучшим признается решение, при котором достигается максимальный выигрыш, равный

$$M = \max_{1 \le i \le m} \max_{1 \le j \le n} a_{ij}$$

Для матрицы А наилучшим решением будет А2, при котором достигается максимальный выигрыш, равный 9.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 7 \\ 4 & 2 & 9 & 1 \\ 3 & 5 & 8 & 6 \\ 6 & 4 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

Ситуации, требующие применения такого критерия в экономике используют игроки, поставленные в безвыходное положение, при котором они руководствуются принципом «или пан, или пропал».

Максиминный критерий Вальда (критерий крайнего пессимизма)

рассматривает природу как агрессивно настроенного и сознательно действующего противного, аналогичного тому, который был рассмотрен в матричной игре двух лиц с нулевой суммой. Выбирается решение, для которого достигается значение

$$W = \max_{1 \le i \le m} \min_{1 \le j \le n} a_{ij}$$

Т.е. для матрицы А

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 7 \\ 4 & 2 & 9 & 1 \\ 3 & 5 & 8 & 6 \\ 6 & 4 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

$$W = \max_{1 \le i \le m} \min_{1 \le j \le n} a_{ij} = 3,$$

что соответствует третьей стратегии А3 игрока 1.

Такая стратегия ориентируется на худший случай, когда игрок не заинтересован в крупной удаче, но хочет застраховать себя от неожиданных проигрышей.

Критерий минимаксного риска Сэвиджа

аналогичен выбору стратегии по критерию Вальда, но игрок руководствуется не платежной матрицей A, а матрицей рисков R:

$$R = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 8 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$S = \min_{1 \le i \le m} \max_{1 \le j \le n} r_{ij}$$

Для выше приведенной матрицы R имеем:

$$\max_{1 \le j \le 4} r_{1j} = 8; \max_{1 \le j \le 4} r_{2j} = 6; \max_{1 \le j \le 4} r_{3j} = 3; \max_{1 \le j \le 4} r_{4j} = 7; \max_{1 \le j \le 4} r_{5j} = 5.$$

Минимально возможный из самых крупных рисков, равный 3, достигается при использовании третьей стратегии A3.

ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ РИСКА

В этом случае различным состояниям природы поставлены в соответствие соответствующие вероятности. Таким образом, игрок 1 принимает решение на основе критерия максимального ожидаемого среднего выигрыша или минимального ожидаемого среднего риска.

Если для некоторой игры с природой, заданной платежной матрицей A={aij} стратегиям природы Пj (j=1,2,…,n) соответствуют вероятности pj, то оптимальной стратегией игрока 1 будет та, которая обеспечивает ему максимальный средний выигрыш (максимизирует математическое ожидание выигрыша), т.е.

$$\max_{1\le i\le m} \sum_{j=1}^{n} p_j \cdot a_{ij}$$

Применительно к матрице упущенных возможностей (матрице рисков) оптимальной будет стратегия, обеспечивающая ему минимальный средний риск:

$$\min_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{n} p_j \cdot r_{ij}$$

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 15 & 30 & 42 & 60 \\ 15 & 70 & 45 & 20 & 35 \\ 25 & 20 & 40 & 75 & 10 \\ 80 & 10 & 20 & 10 & 40 \end{pmatrix}$$

Пусть для данной платежной матрицы p1 = 0,1; p2 = p3 = 0,2; p4 = 0,4; p5=0,1.

ТОГДА:

для первой стратегии

$$\sum_{j=1}^{5} p_j a_{1j} = 0,1 \cdot 20 + 0,2 \cdot 15 + 0,2 \cdot 30 + 0,4 \cdot 42 + 0,1 \cdot 60 = 33,8$$

для второй стратегии

$$\sum_{j=1}^{5} p_j a_{2j} = 0,1 \cdot 15 + 0,2 \cdot 70 + 0,2 \cdot 45 + 0,4 \cdot 20 + 0,1 \cdot 35 = 36$$

для третьей стратегии

$$\sum_{j=1}^{5} p_j a_{3j} = 0,1 \cdot 25 + 0,2 \cdot 20 + 0,2 \cdot 40 + 0,4 \cdot 75 + 0,1 \cdot 10 = 45,5$$

для четвертой стратегии

$$\sum_{j=1}^{5} p_j a_{4j} = 0,1 \cdot 80 + 0,2 \cdot 10 + 0,2 \cdot 20 + 0,4 \cdot 10 + 0,1 \cdot 40 = 22$$

45,5

$$R = \begin{pmatrix} 60 & 55 & 15 & 33 & 0 \\ 65 & 0 & 0 & 55 & 25 \\ 55 & 50 & 5 & 0 & 50 \\ 0 & 60 & 25 & 65 & 20 \end{pmatrix}$$

Пусть для данной матрицы рисков р1 = 0,1; р2 = р3 = 0,2; р4 = 0,4; р5=0,1.

ТОГДА:

для первой стратегии

$$\sum_{j=1}^{5} p_j r_{1j} = 0,1 \cdot 60 + 0,2 \cdot 55 + 0,2 \cdot 15 + 0,4 \cdot 33 + 0,1 \cdot 0 = 33,2$$

для второй стратегии

$$\sum_{j=1}^{5} p_j r_{2j} = 0,1 \cdot 65 + 0,2 \cdot 0 + 0,2 \cdot 0 + 0,4 \cdot 55 + 0,1 \cdot 25 = 31$$

для третьей стратегии

$$\sum_{j=1}^{5} p_j r_{3j} = 0,1 \cdot 55 + 0,2 \cdot 50 + 0,2 \cdot 5 + 0,4 \cdot 0 + 0,1 \cdot 50 = 21,5$$

для четвертой стратегии

$$\sum_{j=1}^{5} p_j r_{4j} = 0,1 \cdot 0 + 0,2 \cdot 60 + 0,2 \cdot 25 + 0,4 \cdot 65 + 0,1 \cdot 20 = 45$$

21,5