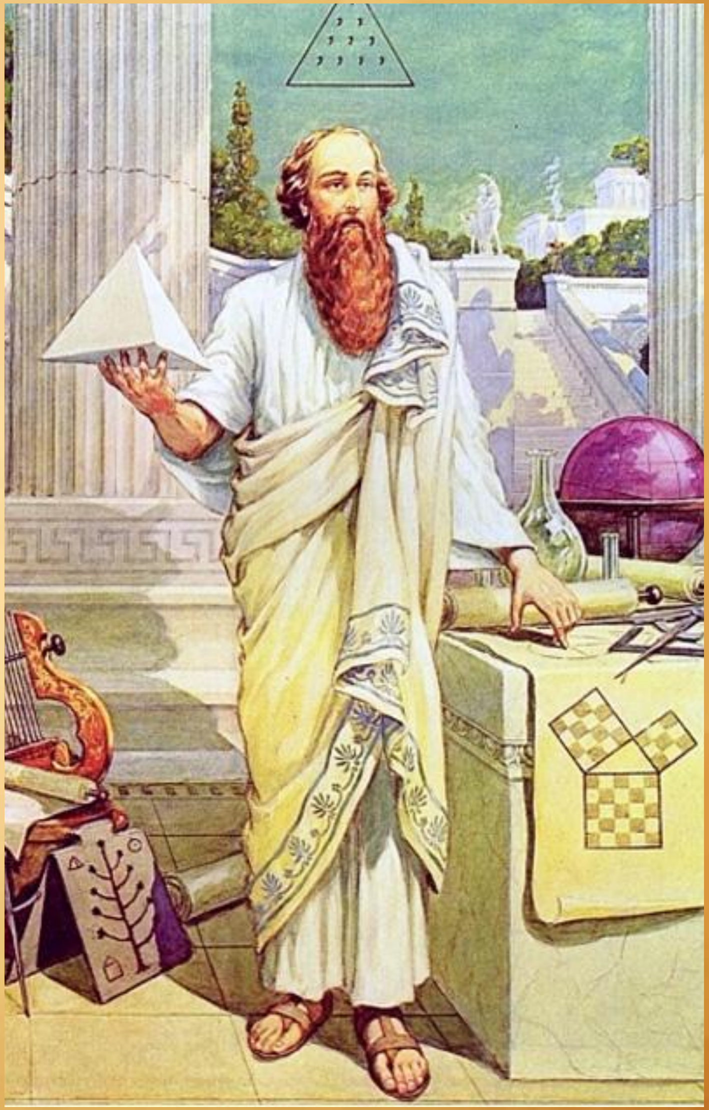
Теорема Пифагора

"Заслугой первых греческих математиков, таких как Фалес, Пифагор и пифагорейцы, является не открытие математики, но ее систематизация и обоснование. В их руках вычислительные рецепты, основанные на смутных представлениях, превратились в точную науку."



Содержание

- История теоремы
- Формулировка теоремы
- Доказательства теоремы
- Значение теоремы Пифагора

История теоремы

- Исторический обзор начнем с **древнего Китая.** Здесь особое внимание привлекает математическая книга Чупей. В этом сочинении так говорится о пифагоровом треугольнике со сторонами 3, 4 и 5:
- *"Если прямой угол разложить на составные части, то линия, соединяющая концы его сторон, будет 5, когда основание есть 3, а высота 4".*
- В этой же книге предложен рисунок, который совпадает с одним из чертежей индусской геометрии Басхары.

Кантор (крупнейший немецкий историк математики) считает, что равенство

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

было известно уже **египтянам** еще около 2300 г. до н. э., во времена царя **Аменемхета I** (согласно папирусу 6619 Берлинского музея).

По мнению Кантора **гарпедонапты**, или "натягиватели веревок", строили прямые углы при помощи прямоугольных треугольников со сторонами 3, 4 и 5.

Очень легко можно воспроизвести их способ построения. Возьмем веревку длиною в 12 м. и привяжем к ней по цветной полоске на расстоянии 3м. от одного конца и 4 метра от другого . Прямой угол окажется заключенным между сторонами длиной в 3 и 4 метра. Гарпедонаптам можно было бы возразить, что их способ построения становиться излишним, если воспользоваться, например, деревянным угольником, применяемым всеми плотниками. И действительно, известны египетские рисунки, на которых встречается такой инструмент, например рисунки, изображающие столярную мастерскую.

- Несколько больше известно о теореме Пифагора у **вавилонян**. В одном тексте, относимом ко времени Хаммураби, т. е. к 2000 г. до н. э., приводится приближенное вычисление гипотенузы прямоугольного треугольника. Отсюда можно сделать вывод, что в Двуречье умели производить вычисления с прямоугольными треугольниками, по крайней мере в некоторых случаях. Основываясь, с одной стороны, на сегодняшнем уровне знаний о египетской и вавилонской математике, а с другой-на критическом изучении греческих источников,**Ван-дер-Варден** (голландский математик) сделал следующий вывод:

Формулировка теоремы

Во времена Пифагора теорема звучала так:

- « Доказать, что квадрат, построенный на гипотенузе прямоугольного треугольника, равновелик сумме квадратов, построенных на катетах»

или

- « Площадь квадрата, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, равна сумме площадей квадратов, построенных на его катетах».

Современная формулировка

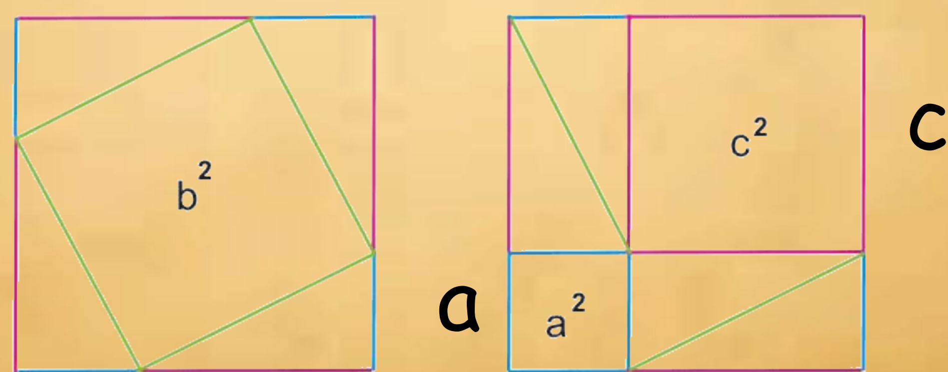
« В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов».

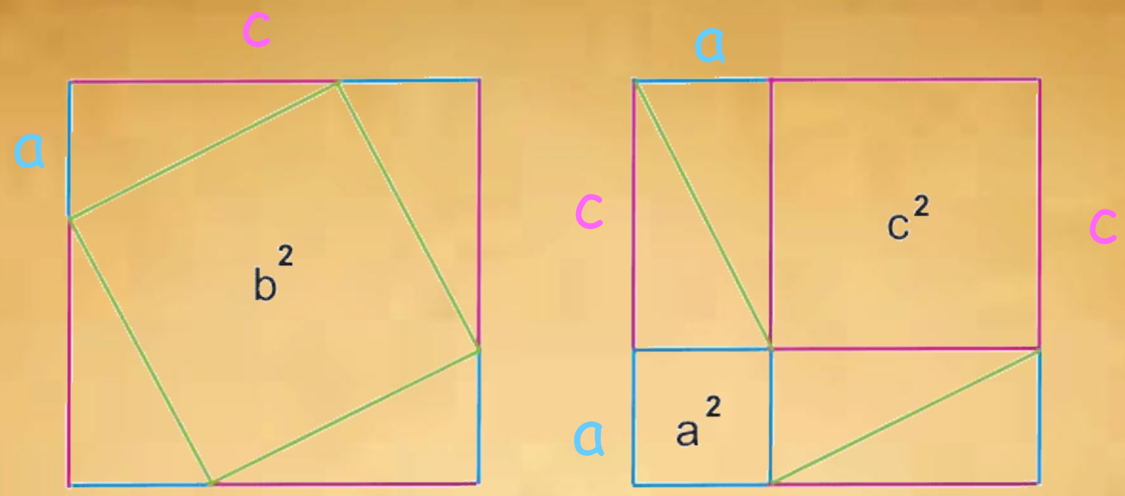
Доказательства теоремы

Существует около 500 различных доказательств этой теоремы (геометрических, алгебраических, механических и т.д.).

I. Самое простое доказательство

Рассмотрим квадрат, показанный на рисунке.
Сторона квадрата равна **a + c**.



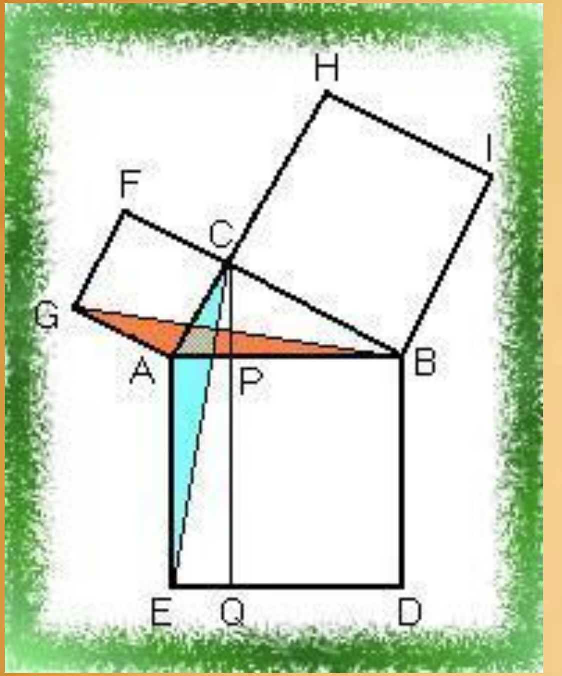


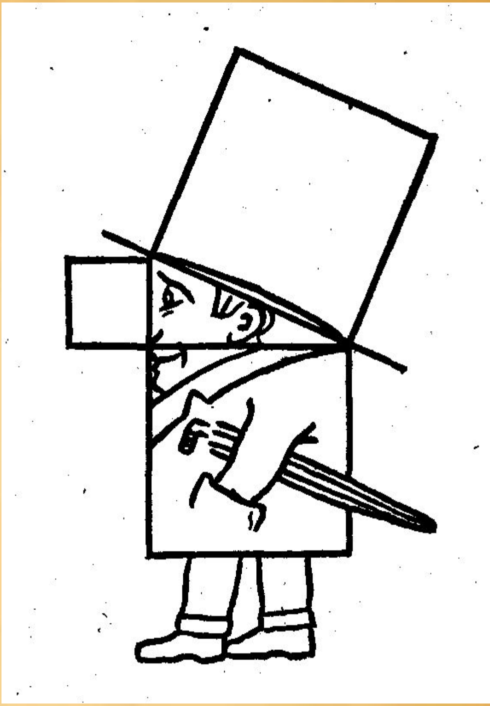
В одном случае (слева) квадрат разбит на квадрат со стороной b и четыре прямоугольных треугольника с катетами a и c.

В другом случае (справа) квадрат разбит на два квадрата со сторонами a и c и четыре прямоугольных треугольника с катетами a и c.

Таким образом, получаем, что площадь квадрата со стороной b равна сумме площадей квадратов со сторонами a и c.

II. Доказательство Евклида





Дано:

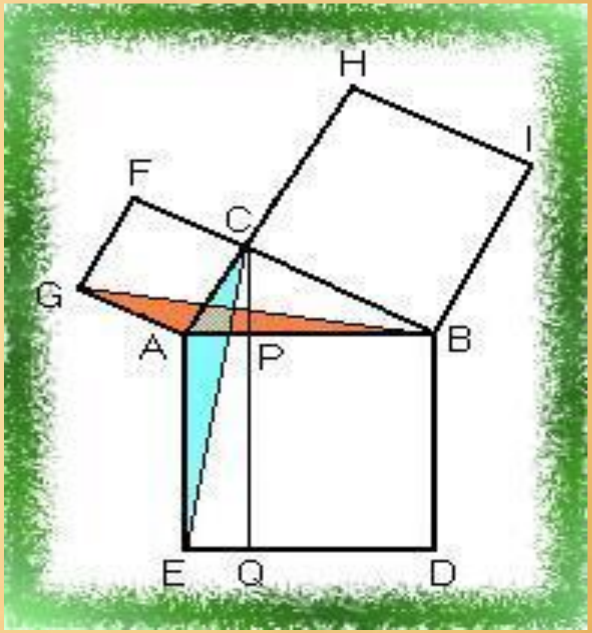
ABC-прямоугольный треугольник

Доказать:

$S_{ABDE}=S_{ACFG}+S_{BCHI}$

Доказательство:

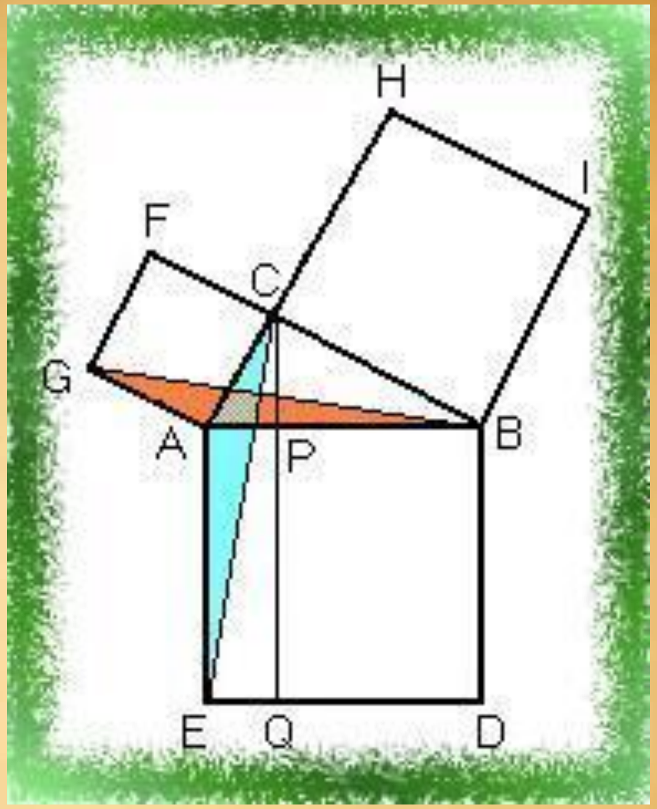
Пусть *ABDE*-квадрат, построенный на гипотенузе прямоугольного треугольника *ABC*, а *ACFG* и *BCHI*-квадраты, построенные на его катетах. Опустим из вершины *C* прямого угла перпендикуляр *CP* на гипотенузу и продолжим его до пересечения со стороной *DE* квадрата *ABDE* в точке *Q*; соединим точки *C* и *E*, *B* и *G*.



Очевидно, что углы ***CAE=GAB(=A+90°)***; отсюда следует, что треугольники ***ACE*** и ***AGB***(закрашенные на рисунке) равны между собой (по двум сторонам и углу, заключённому между ними). Сравним далее треугольник ***ACE*** и прямоугольник ***PQEA***; они имеют общее основание ***AE*** и высоту ***AP***, опущенную на это основание, следовательно

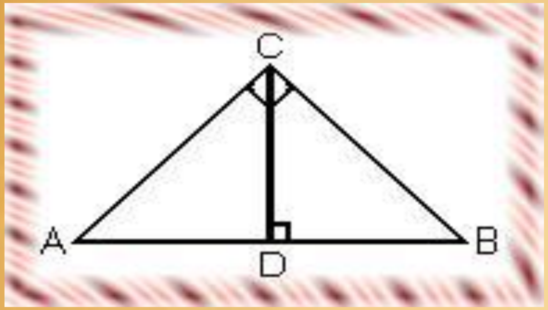
$S_{PQEA}=2S_{ACE}$

Точно так же квадрат FCAG и треугольник BAG имеют общее основание GA и высоту AC; значит, $S_{FCAG}=2S_{GAB}$



Отсюда и из равенства треугольников ACE и GBA вытекает равновеликость прямоугольника QPBD и квадрата CFGA; аналогично доказывается и равновеликость прямоугольника QPAE и квадрата CHIB. А отсюда, следует, что квадрат ABDE равновелик сумме квадратов ACFG и BCHI, т.е. теорема Пифагора.

III. Алгебраическое доказательство



Дано: *ABC*-прямоугольный треугольник

Доказать: $AB^2=AC^2+BC^2$

Доказательство:

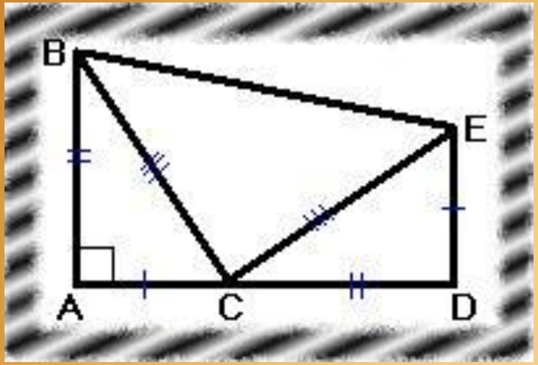
1) Проведем высоту **CD** из вершины прямого угла **C**.
2) По определению косинуса угла **cosA=AD/AC=AC/AB**, отсюда следует **$AB*AD=AC^2$.**
3) Аналогично **cosB=BD/BC=BC/AB**, значит **$AB*BD=BC^2$.**
4) Сложив полученные равенства почленно, получим:

$AC^2+BC^2=AB*(AD + DB)$

$AB^2=AC^2+BC^2$.

Что и требовалось доказать.

IV. Геометрическое доказательство



Дано: *ABC*-прямоугольный треугольник
Доказать: $BC^2=AB^2+AC^2$

Доказательство:

1) Построим отрезок *CD* равный отрезку *AB* на продолжении катета *AC* прямоугольного треугольника *ABC*. Затем опустим перпендикуляр *ED* к отрезку *AD*, равный отрезку *AC*, соединим точки *B* и *E*.
2) Площадь фигуры *ABED* можно найти, если рассматривать её как сумму площадей трёх треугольников:

$$S_{ABED}=2*AB*AC/2+BC^2/2$$

3) Фигура *ABED* является трапецией, значит, её площадь равна:

$$S_{ABED}= (DE+AB)*AD/2.$$

4) Если приравнять левые части найденных выражений, то получим:

$AB*AC+BC^2/2=(DE+AB)(CD+AC)/2$
$AB*AC+BC^2/2= (AC+AB)^2/2$
$AB*AC+BC^2/2= AC^2/2+AB^2/2+AB*AC$
$BC^2=AB^2+AC^2.$

Это доказательство было опубликовано в 1882 году Гэрфилдом.

Значение теоремы Пифагора

Теорема Пифагора- это одна из самых важных теорем геометрии. Значение её состоит в том, что из неё или с её помощью можно вывести большинство теорем геометрии.

В средние века теорема Пифагора, *magister matheseos*, определяла границу если не наибольших возможных, то по крайней мере хороших математических знаний. Характерный чертёж теоремы Пифагора, который ныне иногда превращается школьниками, например, в облаченного в мантию профессора (рис. 7, 8) или в человечка в цилиндре (рис. 9) и т.п., в те времена всеобщей страсти к символам нередко употреблялся как символ математики. Столь же часто мы встречаемся с «Пифагором» в средневековой живописи, мозаике, геральдике.