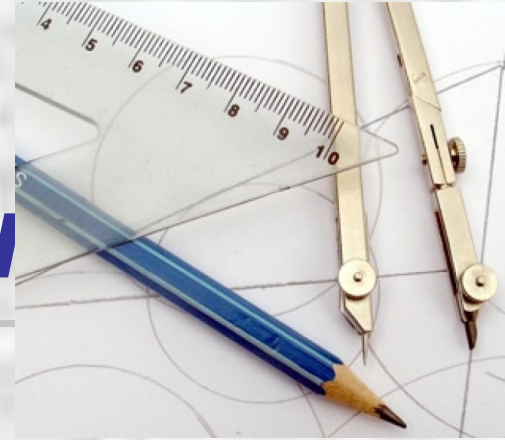




***Теорема Менелая и  
теорема Чебы  
в школьном курсе  
математики***



***«Все незначительное нужно,  
Чтобы значительному быть...»  
И. Северянин***

**Работа учителя математики Колиной Н.К.,  
МБОУ сош№17,г.Заволжье Нижегородской области**

# Содержание

## Теоретические основы

- Теорема Чевы
- Теорема Менелая

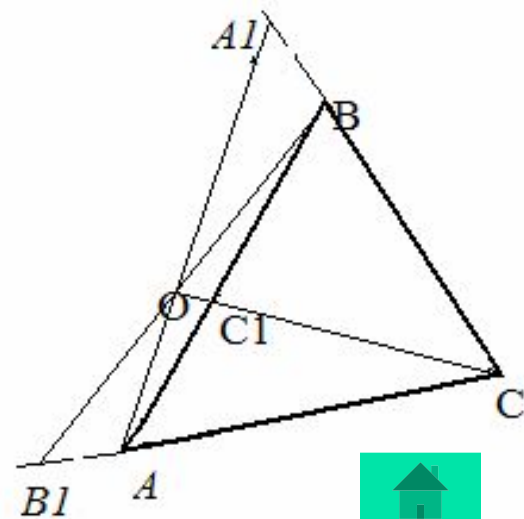
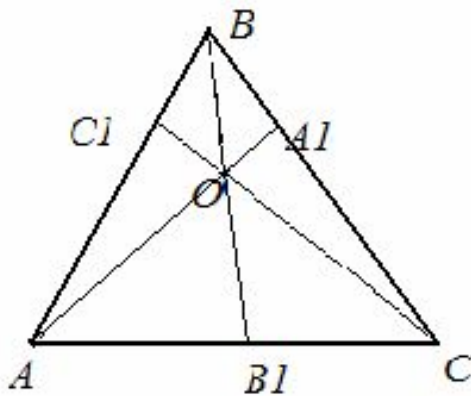
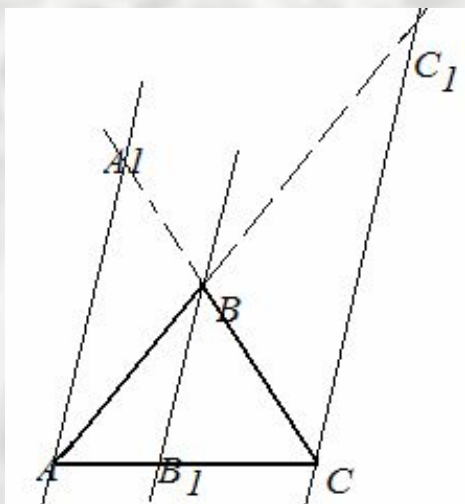
## Методические рекомендации

- Методика обучения решению задач в период предпрофильной подготовки
- Изучение темы «Теорема Менелая и теорема Чевы» в курсе геометрии 10 класса Изучение темы «Теорема Менелая и теорема Чевы» в курсе геометрии 10 класса
- Изучение темы «Теорема Менелая и теорема Чевы» в курсе геометрии 10 класса

# Теорема Чебы

- Пусть в  $\triangle ABC$  на сторонах  $BC, AC, AB$  или их продолжениях взяты соответственно точки  $A_1, B_1$  и  $C_1$ , не совпадающие с вершинами треугольника. Прямые  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  пересекаются в одной точке или параллельны тогда и только тогда, когда выполняется равенство

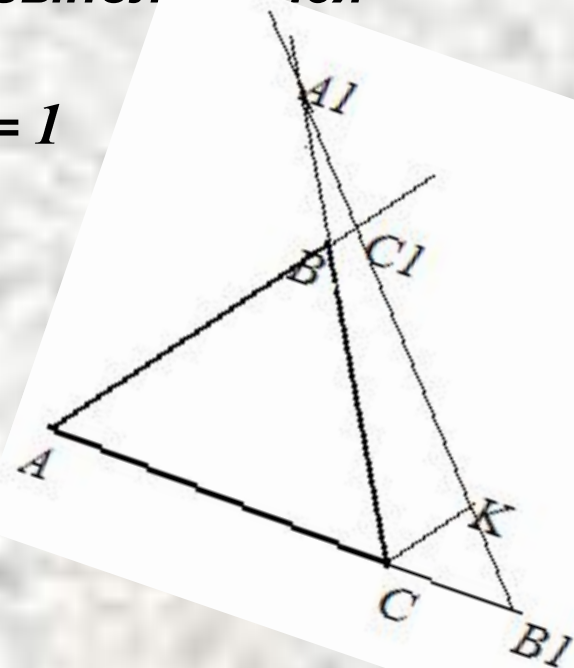
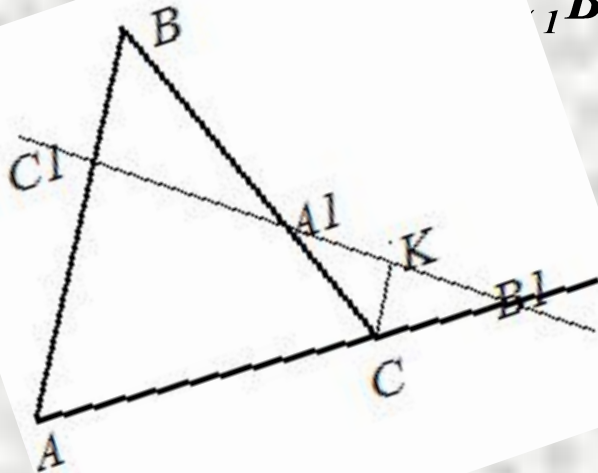
$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$$



# Теорема Менелая

Пусть на сторонах  $AB$ ,  $BC$  и на продолжении стороны  $AC$  (либо на продолжениях сторон  $AB$ ,  $BC$  и  $AC$ )  $\triangle ABC$  взяты соответственно точки  $C_1$ ,  $A_1$  и  $B_1$ , не совпадающие с вершинами  $\triangle ABC$ . Точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$$







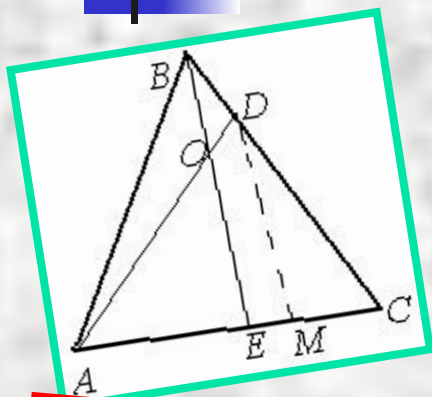
# Методика обучения решению задач в период предпрофильной подготовки

---

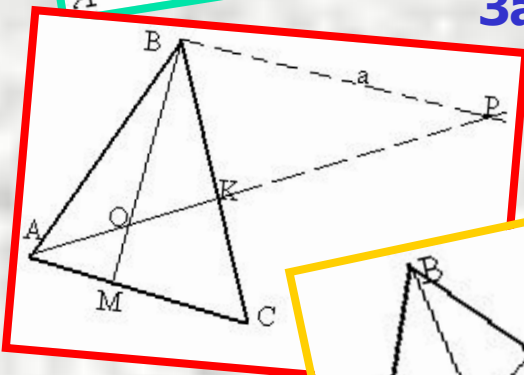
- 1. Теорема Менелая и пропорциональные отрезки в треугольнике.
- 2. Теорема Чебы и ее следствия.  
Применение теорем Чебы и Менелая к задачам на доказательство.
- 3. Решение задач на пропорциональное деление отрезков в треугольнике.
- 4. Решение задач, связанных с нахождением площадей.
- 5. Комбинированные задачи.



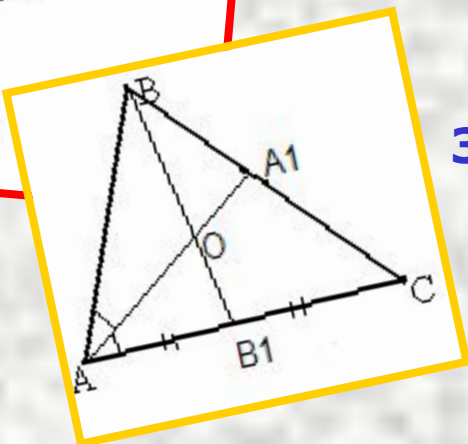
# Теорема Менелая и пропорциональные отрезки в треугольнике



**Задача 1.** В треугольнике ABC точка D делит сторону BC в отношении  $BD:DC=1:3$ , а точка O делит AD в отношении  $AO:OD=5:2$ . В каком отношении прямая BO делит отрезок AC?



**Задача 2.** В  $\triangle ABC$  на стороне AC взята точка M, а на стороне BC – точка K так, что  $AM:MC=2:3$ ,  $BK:KC=4:3$ . В каком отношении AK делит отрезок BM?

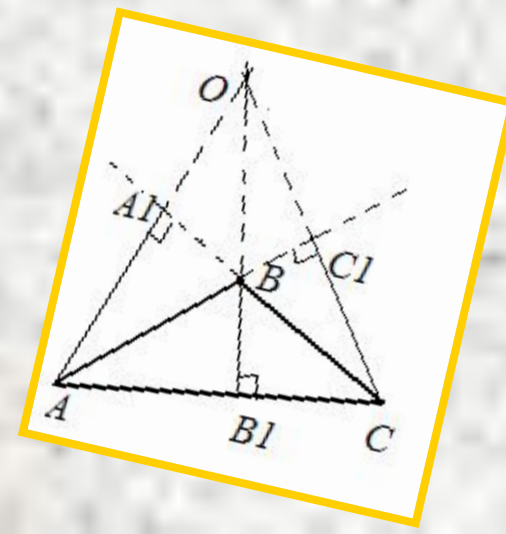
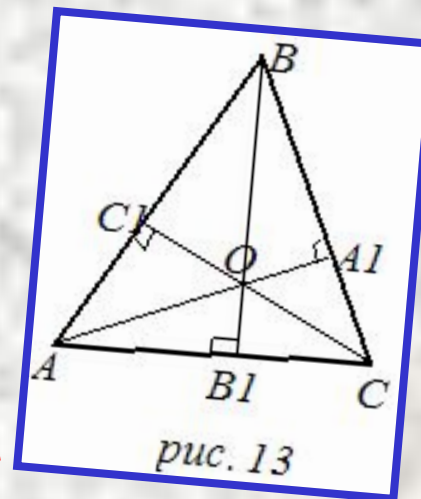
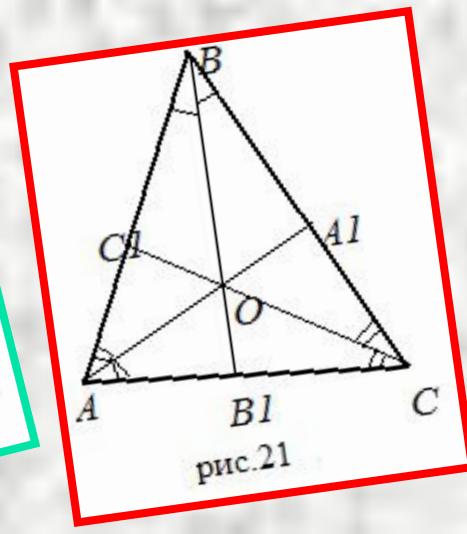
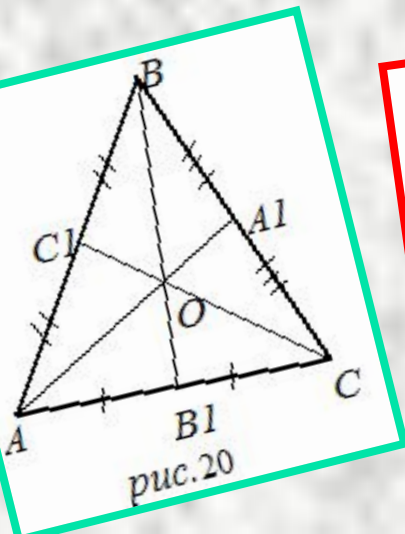


**Задача 3.** В  $\triangle ABC$   $AA_1$  – биссектриса,  $BB_1$  – медиана;  $AB=2$ ,  $AC=3$ ;  
Найти  $BO:OB_1$



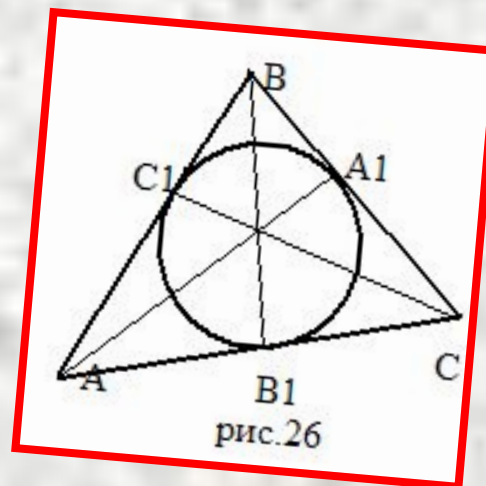
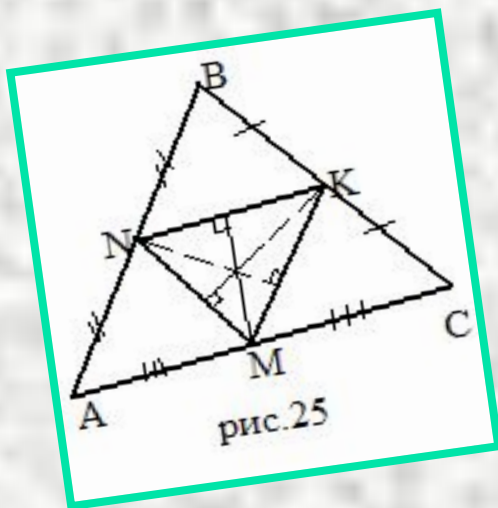
# Теорема Чебы и ее следствия.

- **Следствие 1.** Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от вершины.
- **Следствие 2.** Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.
- **Следствие 3.** Высоты треугольника (или их продолжения) пересекаются в одной точке.



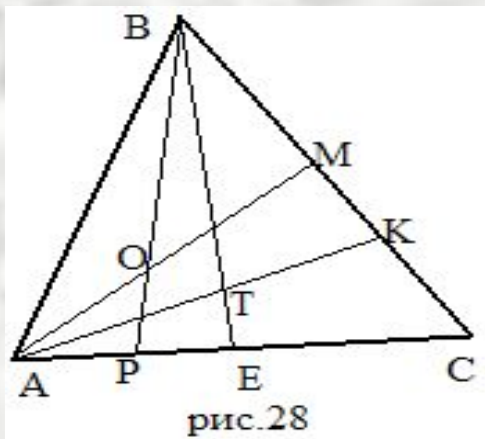
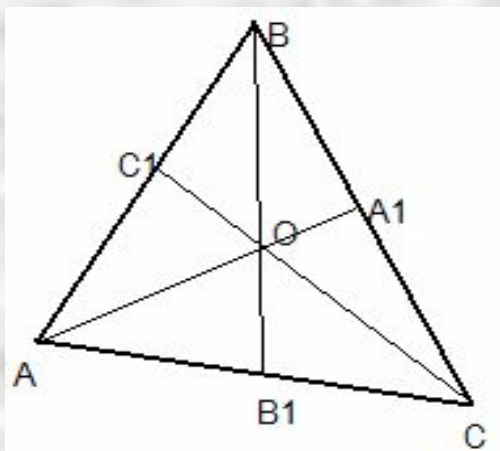
# Теорема Чебы и ее следствия.

- **Следствие 4.** Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке.
- **Следствие 5.** Прямые, соединяющие вершины треугольника с точками, в которых вписанная окружность касается противоположных сторон, пересекаются в одной точке.





# Применение теорем Чебы и Менелая к задачам на доказательство



- **Задача 1.** Используя теорему Чебы, доказать, что в произвольном треугольнике прямые, проходящие через вершины и делящие периметр треугольника пополам, пересекаются в одной точке.
- **Задача 2.** На стороне AC треугольника ABC взяты точки P и E, на стороне BC – точки M и K, причем  $AP:PE:EC = CK:KM:MB$ . Отрезки AM и BP пересекаются в точке O, отрезки AK и BE – в точке T. Докажите, что точки O, T и C лежат на одной прямой.



# Задачи на пропорциональное деление отрезков в треугольнике.

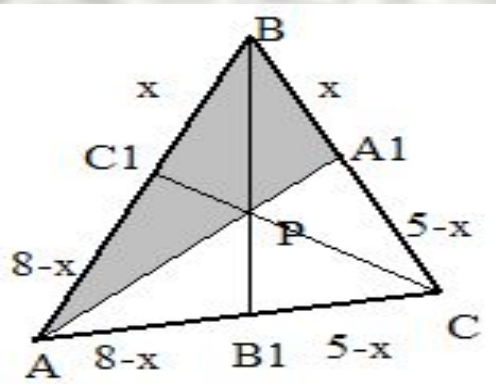
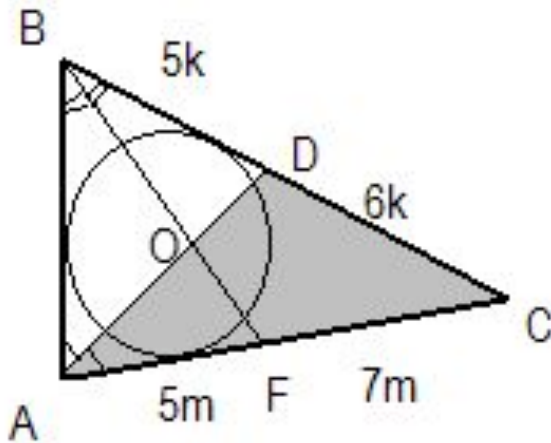


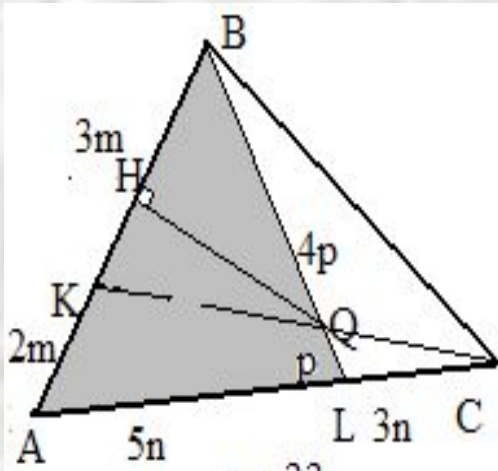
рис.30

- Задача 1.** В треугольнике ABC, описанном около окружности,  $AB = 8$ ,  $BC = 5$ ,  $AC = 4$ . Точки  $A_1, B_1$  и  $C_1$  - точки касания, принадлежащие соответственно сторонам BC, AC и BA. Точка P - точка пересечения отрезков  $AA_1$  и  $CC_1$ . Найдите  $AP:PA_1$ .

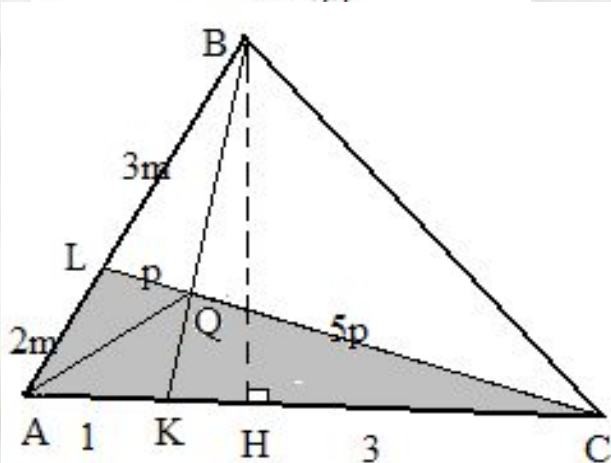


- Задача 2.** Стороны треугольника 5, 6 и 7. Найдите отношение отрезков, на которые биссектриса большего угла этого треугольника разделена центром окружности, вписанной в треугольник.

# Задачи на пропорциональное деление отрезков в треугольнике.



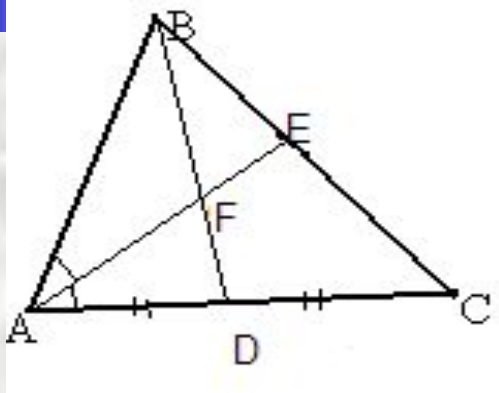
- **Задача 3.** В треугольнике ABC, площадь которого равна 6, на стороне AB взята точка K, делящая эту сторону в отношении  $AK:KB = 2:3$ , а на стороне AC – точка L, делящая AC в отношении  $AL:LC = 5:3$ . Точка Q пересечения прямых CK и BL удалена от прямой AB на расстояние 1,5. Найдите длину стороны AB.



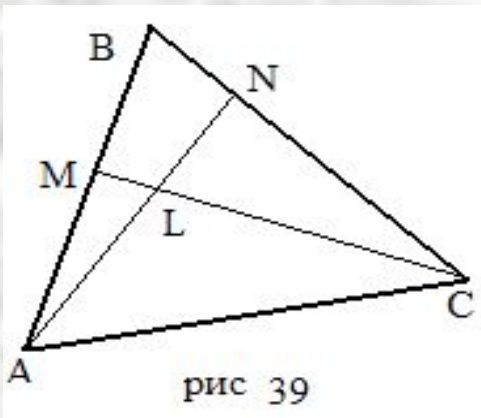
- **Задача 4.** На стороне AC в треугольнике ABC взята точка K.  $AK=1$ ,  $KC = 3$ . На стороне AB взята точка L.  $AL:LB=2:3$ . Q – точка пересечения прямых BK и CL.  $S = 1$ . Найдите длину высоты треугольника ABC, опущенной из вершины B.



# Задачи, связанные с нахождением площадей



- **Задача 1.** Медиана  $BD$  и биссектриса  $AE$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $F$ . Найти площадь треугольника  $ABC$ , если  $AF=3FE$ ,  $BD=4$ ,  $AE=6$ .

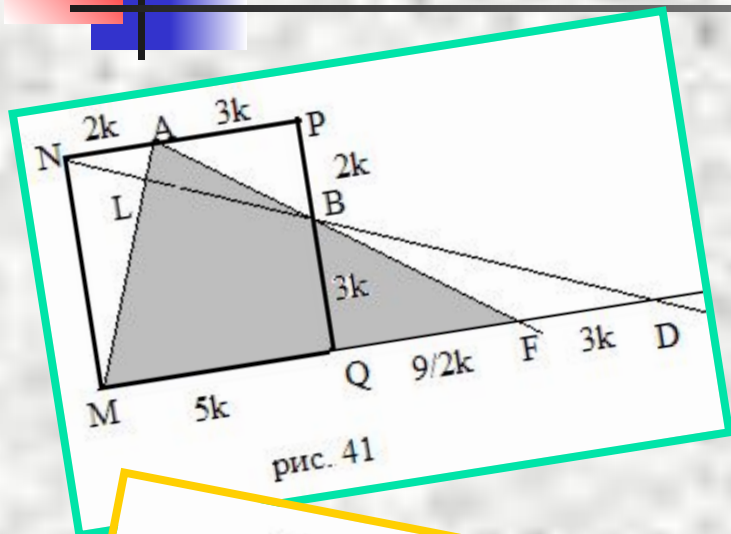


- **Задача 2.** На сторонах  $AB$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  взяты точки  $M$  и  $N$  соответственно. Отрезки  $AN$  и  $CM$  пересекаются в точке  $L$ . Площади треугольников  $AML$ ,  $CNL$  и  $ALC$  равны соответственно  $15$ ,  $48$  и  $40$ . Найти площадь треугольника  $ABC$ .

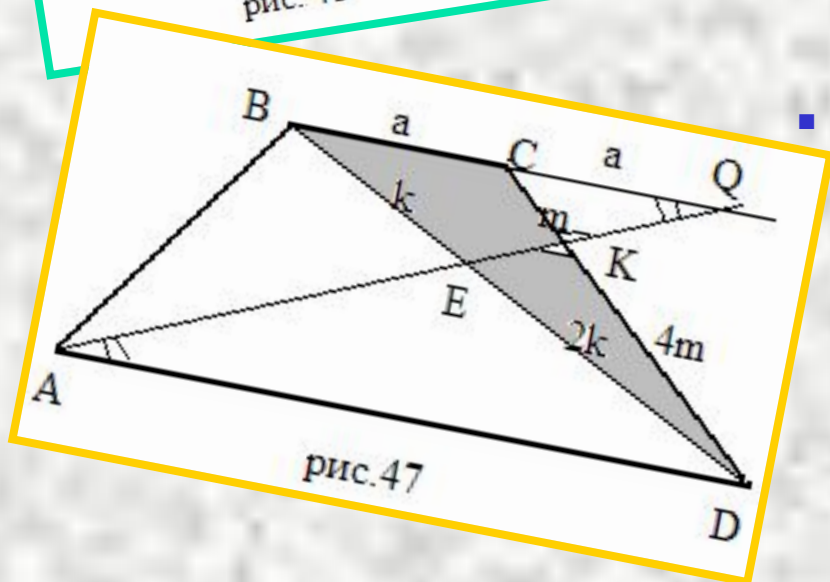




# Комбинированные задачи.



- Задача 1.** На стороне  $NP$  квадрата  $MNPQ$  взята точка  $A$ , а на стороне  $PQ$  – точка  $B$  так, что  $NA:AP = PB:BQ = 2:3$ . Точка  $L$  является точкой пересечения отрезков  $MA$  и  $NB$ . В каком отношении точка  $L$  делит отрезок  $MA$ ?



- Задача 2.** В трапеции  $ABCD$  с основаниями  $AD$  и  $BC$  через точку  $A$  проведена прямая, которая пересекает диагональ  $BD$  в точке  $E$  и боковую сторону  $CD$  в точке  $K$ , причем  $BE:ED = 1:2$ ,  $CK:KD = 1:4$ . Найдите отношение длин оснований трапеции.



# Изучение темы «Теорема Менелая и теорема Чевы» в курсе геометрии 10 класса

## Урок 1. Теорема Менелая и теорема Чевы.

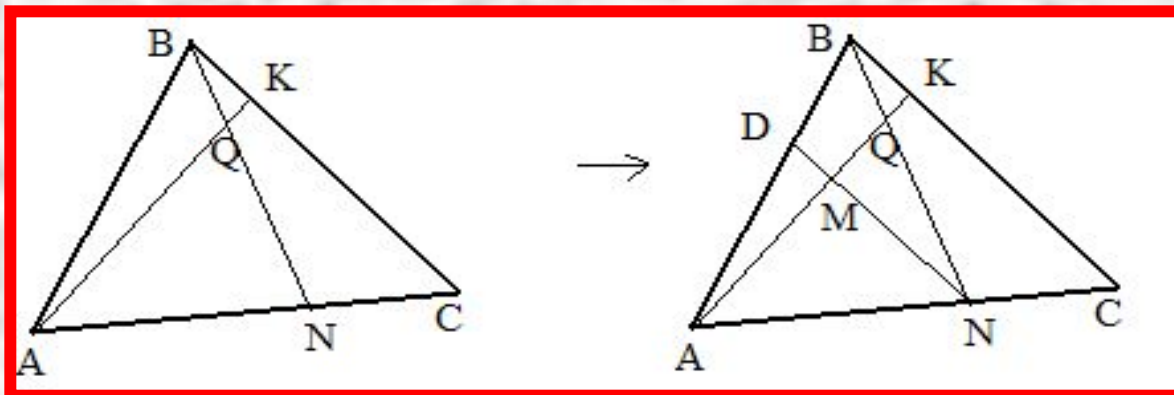
**Задача.** В треугольнике  $ABC$  на стороне  $AC$  взята точка  $N$  так, что  $AN:NC=m:n$ , на стороне  $BC$  - точка  $K$ .  $BN$  пересекает  $AK$  в точке  $Q$ ,  $BQ : QN = r:q$ . Найти отношение площадей треугольников  $AKC$  и  $ABK$ .

$$S_{AKC} : S_{ABK} = KC : BK$$

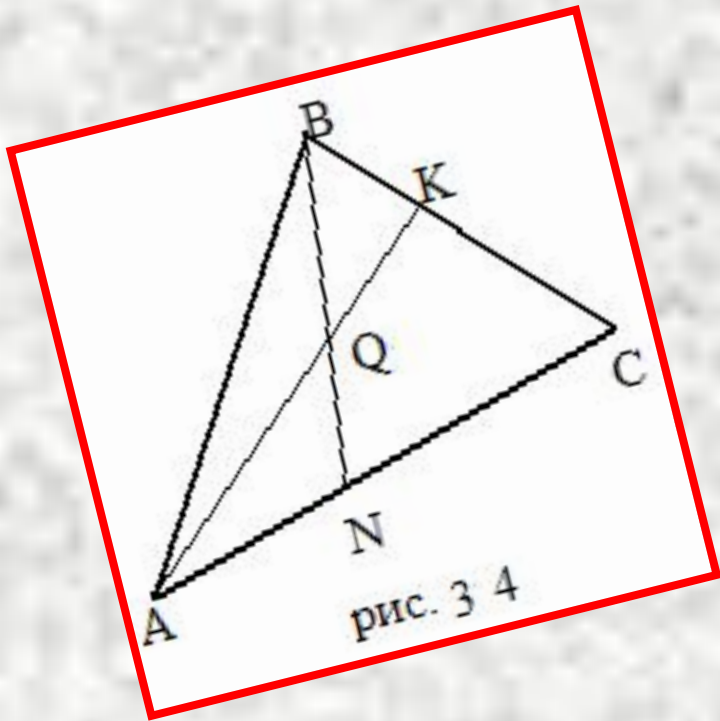
( т.к. высоты  
равны)

**I способ.**  
 $ND \parallel BC$ .

Дополнительное построение:



## II способ. Рассмотрим треугольник BСN и секущую АК. По теореме Менелая



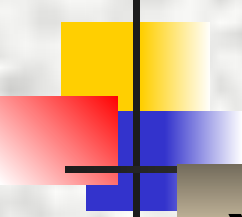
$$\frac{CK}{KB} \cdot \frac{BQ}{QN} \cdot \frac{NA}{AC} = 1; \frac{CK}{KB} \cdot \frac{p}{q} \cdot \frac{m}{m+n} = 1$$



$$\frac{CK}{KB} = \frac{(m+n)q}{mp}$$



$$S_{AKC} : S_{ABK} = \frac{CK}{KB} = \frac{(m+n)q}{mp}.$$



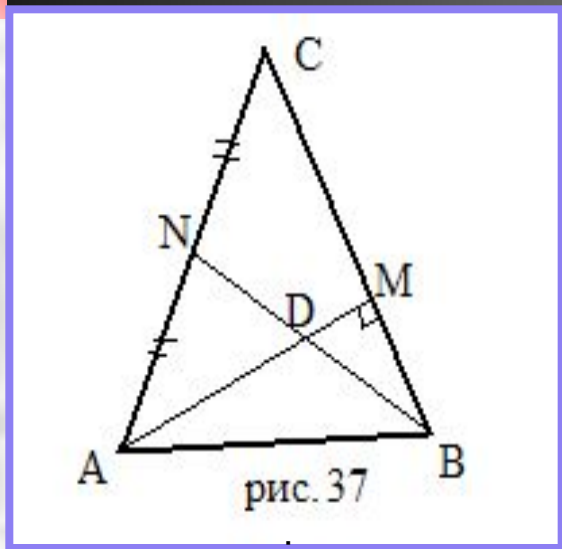
# Изучение темы «Теорема Менелая и теорема Чебы» в курсе геометрии 10 класса

## Урок 2. Применение теорем Менелая и Чебы в решении ключевых задач

- Цели урока:**
- 1) формировать умения:
    - видеть конфигурации, удовлетворяющие заданным условиям;
    - решать задачи нестандартными способами;
    - использовать теоремы в задачах на доказательство;
  - 2) развивать самостоятельность.



**Задача.** В равнобедренном треугольнике ABC (AC=BC) проведены медиана BN и высота AM, которые пересекаются в точке D. AD=5, DM=2. Найти  $S_{ABC}$



**Решение:** AN=NC, AM=5+2=7.

Рассмотрим  $\triangle AMC$  и секущую NB. По теореме Менелая

$$\frac{AN}{NC} \cdot \frac{CB}{BM} \cdot \frac{MD}{DA} = 1 \Rightarrow 1 \cdot \frac{CB}{BM} \cdot \frac{2}{5} = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{CB}{BM} = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{CM}{BM} = \frac{3}{2}$$

Пусть коэффициент пропорциональности равен k, тогда CM=3k, BM=2k. Из  $\triangle ACM$ -прямоугольного:

$$AC^2 = CM^2 + AM^2 \Rightarrow AC^2 = 9k^2 + 49 \quad AC = CB \Rightarrow AC = 5k \Rightarrow 25k^2 = 9k^2 + 49$$

$$k = \frac{7}{4} \Rightarrow CB = 5k = \frac{35}{4} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot CB \cdot AM = \frac{1}{2} \cdot \frac{35}{4} \cdot 7 = \frac{245}{8}$$

Ответ:  $\frac{245}{8}$



# Применение теорем Менелая и Чевы в решении стереометрических задач.

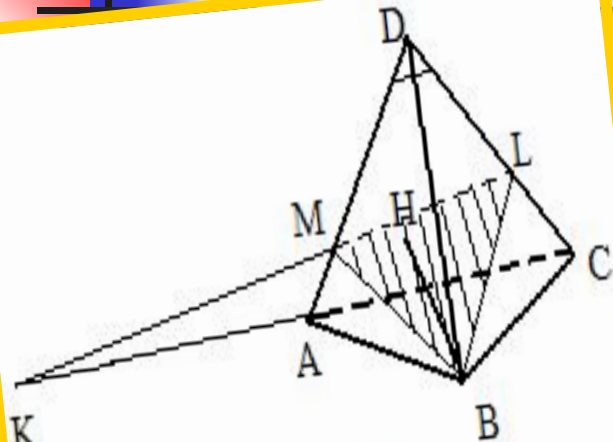


рис.48

- **Задача 1.** На продолжении ребра  $AC$  правильной треугольной пирамиды  $ABCD$  с вершиной  $D$  взята точка  $K$  так, что  $KA:KC=3:4$ , а на ребре  $DC$  взята точка  $L$  так, что  $DL:LC=2:1$ . В каком отношении делит объем пирамиды плоскость, проходящая через точки  $B, L$  и  $K$ ?

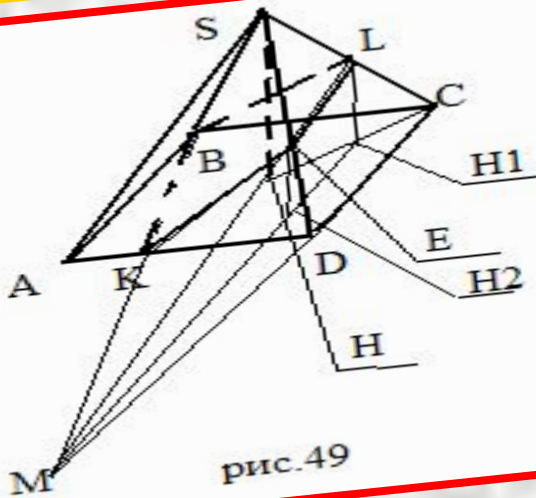
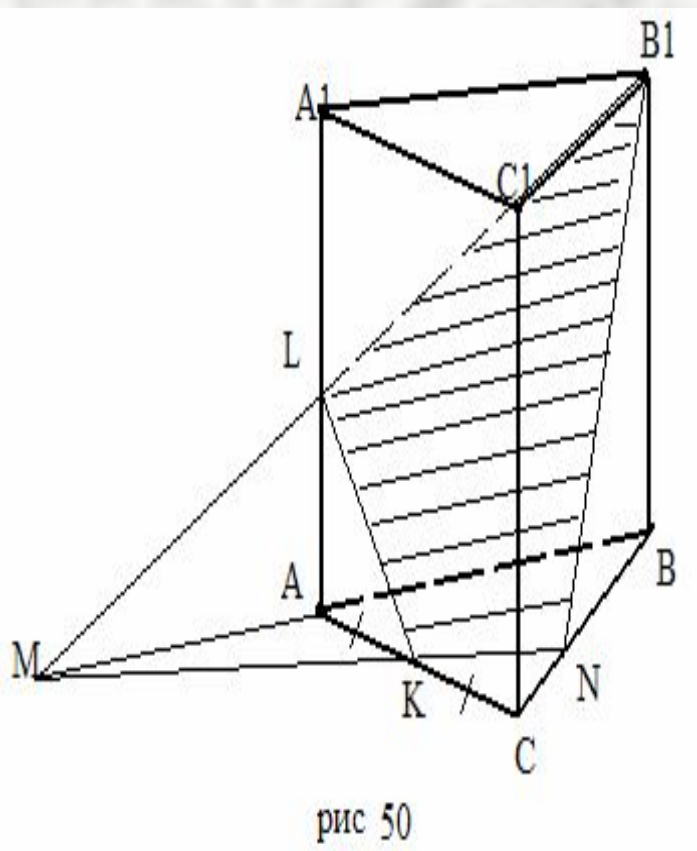


рис.49

- **Задача 2.** Дана правильная четырехугольная пирамида  $SABCD$  с вершиной  $S$ . На продолжении ребра  $CD$  взята точка  $M$  так, что  $DM=2CD$ . Через точки  $M, B$  и середину ребра  $SC$  проведена плоскость. В каком отношении она делит объем пирамиды?

# Применение теорем Менелая и Чебы в решении стереометрических задач.



- **Задача 3.** Дана правильная треугольная призма с боковыми ребрами  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$ . Причем на продолжении ребра  $BA$  взята точка  $M$  так, что  $MA=AB$ . Через точки  $M, V_1$  и середину ребра  $AC$  проведена плоскость. В каком отношении она делит объем призмы?





---

**«Умение решать задачи- такое же  
практическое искусство, как  
умение плавать или бегать. Ему  
можно научиться только путем  
подражания или упражнения»**

**Д.Пойа**

