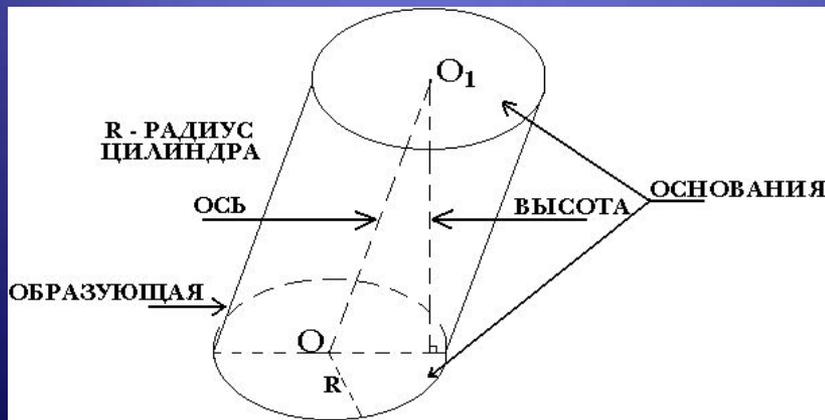


Цилиндр

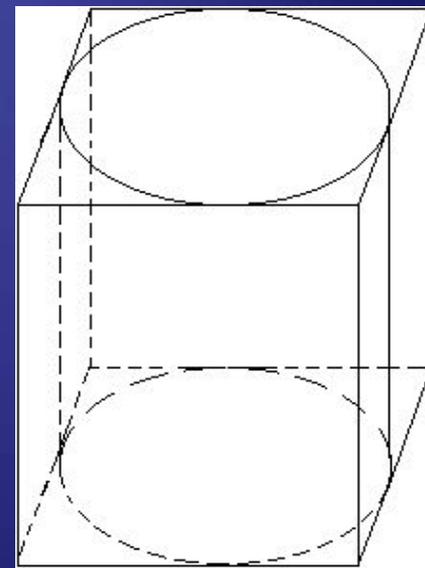
Выполнил: Студент гр 916 Ковардинов Павел

Определение и общие свойства цилиндра.

- ◆ Цилиндром (точнее, прямым круговым цилиндром) называется тело вращения, полученное при вращении прямоугольника вокруг оси, проходящей через одну из его сторон.



- ◆ Призма называется описанной около цилиндра, если основание её - это многоугольники, описанные около основания цилиндра, а боковые грани касаются цилиндра



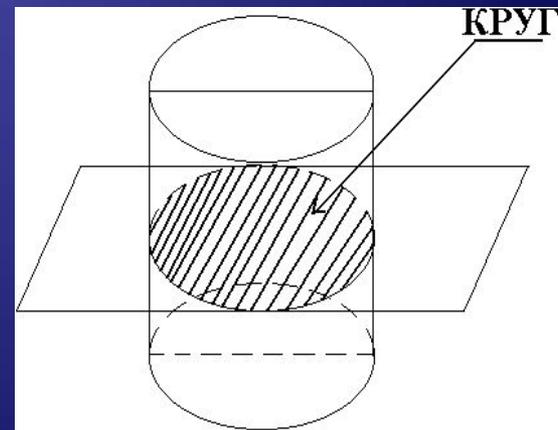
Простейшие свойства цилиндра:

- ◆ **Свойство 1:** Все образующие цилиндра равны друг другу.
- ◆ **Свойство 2:** Основание цилиндра равны друг другу.
- ◆ **Свойство 3:** Все сечения цилиндра плоскостями, параллельными плоскостями основания цилиндра, равны основанию цилиндра.

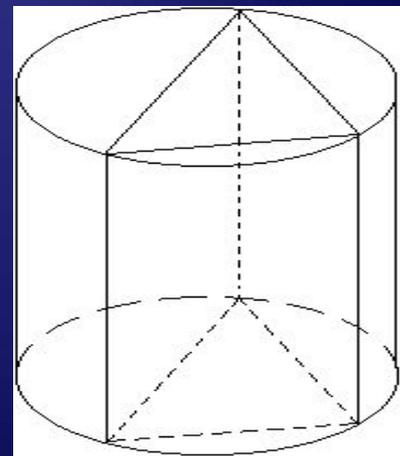
- ◆ Перпендикуляр, опущенный из любой плоскости одного основания цилиндра на плоскость другого его основания, называется *высотой цилиндра* (иначе длина образующей). Т.к. плоскости оснований параллельны, то перпендикуляры у них общие и все они равны. Поэтому высоту можно проводить из любой точки плоскости основания.

Цилиндр вращения.

- ♦ *Прямой круговым цилиндром* называется прямой цилиндр, основание которого – круг. Отрезок, соединяющий центры его оснований, называется *осью цилиндра*. Ось прямого кругового цилиндра является его осью вращения, а сам он – фигура вращения. Все сечения прямого кругового цилиндра плоскостями, параллельными плоскостям оснований, являются кругами с центрами на оси (*по свойству 3*). Плоскости этих кругов перпендикулярны оси.

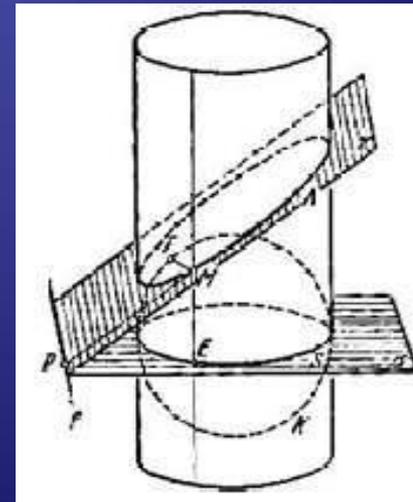


- ◆ Эти прямоугольники называются *осевыми сечениями цилиндра вращения*. Образующие цилиндра вращения, исходящие из точек окружности основания, образуют его *боковую поверхность*.
- ◆ Поэтому прямой круговой цилиндр является фигурой вращения и его называют *цилиндром вращения*. Он получается вращением прямоугольника вокруг своей оси симметрии, а также вращением прямоугольника вокруг стороны .



Эллипс как сечение цилиндра вращения

- ◆ Простейшую кривую поверхность, именно круговой цилиндр, можно получить при помощи простейших кривых – окружности и прямой – следующим образом. Через одну из точек окружности проведем прямую, перпендикулярную к плоскости круга, и будем перемещать её параллельно самой себе вдоль всей окружности. Можно также получить круговой цилиндр, заставив одну прямую вращаться вокруг другой прямой, параллельной первой и служащей для первой прямой осью вращения. Таким образом, круговой цилиндр есть *поверхность вращения*.



Объем цилиндра.

- ♦ **Теорема:** объем цилиндра равен произведению площади основания на высоту.
- ♦ **Доказательство:** Впишем в данный цилиндр P радиуса r и высоты h правильную n -угольную призму F_n , а в эту призму впишем цилиндр P_n . Обозначив через V и V_n объемы цилиндров P и P_n , через r_n – радиус цилиндра P_n . Так как объем призмы F_n равен $S_n \cdot h$, где S_n – площадь основания призмы, а цилиндр P содержит призму F_n , которая, в свою очередь, содержит цилиндр P_n , то $V_n < S_n \cdot h < V$ (неравенство 1). Будем неограниченно увеличивать число n . При этом радиус r_n цилиндра P_n стремиться к радиусу r цилиндра P ($r_n = r \cos \frac{\pi}{2n}$ при $n \rightarrow \infty$). Поэтому объем цилиндра P_n стремиться к объему цилиндра P : $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = V$. Из неравенств 1 следует, что и $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n \cdot h = V$. Но $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \pi r^2$. Таким образом,

$$V = \pi r^2 h \quad (2)$$

Обозначив площадь πr^2 основания цилиндра буквой S , и из формулы (2) получаем

$$V = S \cdot h$$

Площадь цилиндра.

За площадь боковой поверхности цилиндра принимается площадь её развертки. Так как площадь прямоугольника $ABB'A'$ равна $AA' \cdot AB = 2\pi r h$, то для вычисления площади $S_{\text{бок}}$ боковой поверхности цилиндра радиуса r и высоты h получается формула

$$S_{\text{бок}} = 2\pi r h \quad (1)$$

Итак, площадь боковой поверхности цилиндра равна произведению длины окружности основания на высоту цилиндра.

Площадью полной поверхности цилиндра называется сумма площадей боковой поверхности и двух оснований. Так как площадь каждого основания равна πr^2 , то для вычисления площади $S_{\text{цил}}$ полной поверхности цилиндра получаем формулу:

$$S_{\text{цил}} = 2\pi r (r + h)$$

Задача №1

Осевой сечение цилиндра – квадрат, диагональ которого равна 20 см. Найти: а) высоту цилиндра; б) площадь основания цилиндра.

а) Дано:

$$BD = 20 \text{ см}$$

ABCD – осевое сечение,
квадрат.

Цилиндр

Найти:

h - ?;

Решение:

а) Так как ABCD – квадрат,
то

AB=AD. Из треугольника
ABD

по теореме Пифагора: AC^2
=

$$BA^2 + AD^2; \quad 20^2 = h^2 + h^2; \quad 20^2 = 2h^2; \quad h$$

$$400 = 2h^2; \quad h^2 = 200; \quad h = 10\sqrt{2}.$$

Дано:

цилиндр

АВСД – осевое
сечение, квадрат.

Найти:

$S_{\text{осн}}$ - ?

Решение:

$$\text{б) } S_{\text{осн}} = \pi r^2; \quad r = 1/2 AD;$$
$$r = 1/2 h;$$

$$r = (1 \cdot 10\sqrt{2})/2 = 5\sqrt{2};$$

$$S_{\text{осн}} = \pi(5\sqrt{2})^2;$$

$$S_{\text{осн}} = \pi \cdot 25(\sqrt{2})^2; \quad S_{\text{осн}} =$$
$$\pi 50. \quad AD = 20 \text{ см}$$