

**Москаленко Людмила Александровна,
учитель математики
МБОУ Лаишевской СОШ №2
г. Лаишево Республики Татарстан**

***Арифметическая
прогрессия***

Выявите закономерность и задайте последовательность рекуррентной формулой

1) 1, 2, 3, 4, 5, ...

$$a_n = a_{n-1} + 1$$

2) 2, 5, 8, 11, 14, ...

$$a_n = a_{n-1} + 3$$

3) 8, 6, 4, 2, 0, -2, ...

$$a_n = a_{n-1} + (-2)$$

4) 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; ...

$$a_n = a_{n-1} + 0,5$$

$$a_n = a_{n-1} + d$$

Определение арифметической прогрессии

Числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен сумме предыдущего и одного и того же числа d , называется арифметической прогрессией.

Число d называют разностью арифметической прогрессии.

$$a_n = a_{n-1} + d$$

Разность арифметической прогрессии

$$d = a_n - a_{n-1}$$

$d > 0$ → прогрессия возрастающая,

$d < 0$ → прогрессия убывающая

Пример 1. 1, 3, 5, 7, 9, 11,

Это арифметическая прогрессия, у которой $a_1 = 1$, $d = 2$.

Пример 2. 20, 17, 14, 11, 8, 5, 2, -1, -4,

Это арифметическая прогрессия, у которой $a_1 = 20$, $d = -3$.

Пример 3. 8, 8, 8, 8, 8, 8,

Это арифметическая прогрессия, у которой $a_1 = 8$, $d = 0$.

Для обозначения того, что последовательность (a_n) является арифметической прогрессией, иногда бывает удобна следующая запись:

$$\div a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

Значок \div заменяет словосочетание «арифметическая прогрессия».

Если в арифметической прогрессии отбросить все члены, следующие за каким-то конкретным членом последовательности, например за a_n , то получится *конечная арифметическая прогрессия*

$$\div a_1, a_2, a_3, \dots, a_n.$$

Иногда в конечной арифметической прогрессии удобно записывать не только несколько членов в начале, но и несколько членов в конце, например так:

$$\div a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n.$$

Задание арифметической прогрессии формулой n – ого члена

Дано: (a_n) – арифметическая прогрессия, a_1 – первый член прогрессии, d – разность.

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d$$

$$a_5 = a_4 + d = (a_1 + 3d) + d = a_1 + 4d$$

• • •

$a_n = a_1 + (n-1)d$ - формула n – ого члена
арифметической прогрессии

Формула n – ого члена арифметической прогрессии

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

Дана арифметическая прогрессия

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

Известно, что $a_1 = 5$, $d = 4$. Найти a_{22} .

$$a_{22} = a_1 + 21d = 5 + 21 \cdot 4 = 89.$$

Формула n – ого члена арифметической прогрессии

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

Дана арифметическая прогрессия

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

Известно, что $a_1 = -2$, $d = 3$, $a_n = 118$. Найти n .

$$a_n = a_1 + (n - 1)d;$$

$$118 = -2 + (n - 1) \cdot 3;$$

$$118 = 3n - 5;$$

$$n = 41.$$

Формула n – ого члена арифметической прогрессии

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

Дана арифметическая прогрессия

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

Известно, что $d = -2$, $a_{39} = 83$. Найти a_1 .

$$a_{39} = a_1 + 38d;$$

$$83 = a_1 + 38 \cdot (-2);$$

$$a_1 = 159.$$

Формула n – ого члена арифметической прогрессии

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

Дана арифметическая прогрессия

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

Известно, что $a_1 = 7$, $a_{15} = -35$. Найти d .

$$a_{15} = a_1 + 14d;$$

$$-35 = 7 + 14d;$$

$$14d = -42;$$

$$d = -3.$$

Формула суммы членов конечной арифметической прогрессии

Пусть дана конечная арифметическая прогрессия

$$\div a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n.$$

Обозначим через S_n сумму ее членов:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n.$$

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}.$$

Это формула суммы первых n членов арифметической прогрессии.

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n.$$

Характеристическое свойство арифметической прогрессии

Пусть дана арифметическая прогрессия $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$. Рассмотрим три ее члена, следующие друг за другом: a_{n-1}, a_n, a_{n+1} . Известно, что

$$a_n - d = a_{n-1},$$

$$a_n + d = a_{n+1}.$$

Сложив эти равенства, получим:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Это значит, что каждый член арифметической прогрессии, кроме первого (и последнего — в случае конечной прогрессии), равен среднему арифметическому предшествующего и последующего членов.

Характеристическое свойство арифметической прогрессии

Теорема

Числовая последовательность является арифметической прогрессией тогда и только тогда, когда каждый ее член, кроме первого (и последнего — в случае конечной последовательности), равен среднему арифметическому предшествующего и последующего членов (характеристическое свойство арифметической прогрессии).

Характеристическое свойство арифметической прогрессии

Пример 9. При каком значении x числа $3x + 2$, $5x - 4$ и $11x + 12$ образуют конечную арифметическую прогрессию?

Решение. Согласно характеристическому свойству заданные выражения должны удовлетворять соотношению

$$5x - 4 = \frac{(3x + 2) + (11x + 12)}{2}.$$

Решая это уравнение, находим:

$$10x - 8 = 14x + 14;$$

$$x = -5,5.$$

При этом значении x заданные выражения $3x + 2$, $5x - 4$, $11x + 12$ принимают соответственно значения $-14,5$, $-31,5$, $-48,5$. Это арифметическая прогрессия, ее разность равна -17 .

Ответ: $x = -5,5$.

№ 16.1 – устно.

Определите, является ли приведенная ниже последовательность арифметической прогрессией:

а) 2, 4, 6, 8, 10, 12, ... ;

в) 13, 10, 7, 4, 1, -2, ... ;

б) 5, 5, 5, 5, 5, 5, ... ;

г) 3, 1, 3, 1, 3, 1,

№ 16.3 (а,г)

Найдите первый член и разность арифметической прогрессии:

а) $3, -1, -5, -9, \dots$;

г) $-1, -0,9, -0,8, -0,7, \dots$.

№ 16.4 (а,б)

Выпишите первые шесть членов арифметической прогрессии (a_n) , если:

$$\text{а) } a_1 = 3, d = 7;$$

$$\text{б) } a_1 = 10, d = -2,5;$$

№ 16.5 (а,б)

Запишите конечную арифметическую прогрессию (a_n) , заданную следующими условиями:

а) $a_1 = -2, d = 4, n = 5;$

б) $a_1 = 1, d = -0,1, n = 7;$

№ 16.7 (а,б)

Найдите разность и десятый член арифметической прогрессии:

а) $1, 3, 5, 7, \dots$;

б) $\sqrt{5}, 6 + \sqrt{5}, 12 + \sqrt{5}, 18 + \sqrt{5}, \dots$;

№ 16.14 (а,б)

Составьте формулу n -го члена арифметической прогрессии:

а) 2, 5, 8, 11, ... ;

б) 0,5, 1,5, 2,5, 3,5, ... ;

№ 16.16 (а,б)

Дана арифметическая прогрессия (a_n) . Вычислите:

а) a_6 , если $a_1 = 4$, $d = 3$;

б) a_{15} , если $a_1 = -15$, $d = -5$;

№ 16.34 (а,б)

Найдите сумму первых пятидесяти членов арифметической прогрессии (a_n) , если известно, что:

а) $a_1 = 2, a_{50} = 147;$

б) $a_1 = 0,5, a_{50} = -97,5;$

№ 16.35 (а,б)

Найдите сумму первых ста членов арифметической прогрессии (a_n) , если известно, что:

а) $a_1 = -12, d = 2;$

б) $a_1 = 1,5, d = 0,5;$

Домашнее задание:

№ 16.3 (б,в)

16.4 (в,г)

16.14 (в,г)

Интернет ресурсы

http://elkniga.ucoz.ru/publ/uchebniki/matematika/algebra_9_klass_uchebnik_mordkovich_a_g/44-1-0-362 - электронная версия Алгебра. 9 класс. Учебник. Мордкович А.Г., Семенов П.В.

http://elkniga.ucoz.ru/publ/uchebniki/matematika/algebra_9_klass_chast_2_zadachnik_mordkovich_a_g_semenov_p_v/44-1-0-413 - электронная версия Алгебра. 9 класс. Задачник. Мордкович А.Г., Семенов П.В.