

МОУ «Старо - Матаковская средняя общеобразовательная школа»
Алькеевского муниципального района РТ.

Конспекты системы уроков
по теме :

"Логарифмические уравнения."

Учительницы математики
II квалификационной категории
Советниковой Нины

Николаевны.

2009 г.

Для чего были придуманы логарифмы?

Для ускорение вычислений.

Для упрощений вычислений.

Для решение астрономических задач.

- В современной школе основной формой обучения математике ,главным связующем звеном в интеграции различных организационных форм обучения по-прежнему остается урок. В процессе обучения математический материал осознается и усваивается преимущественно в процессе решения задач, потому на уроках математики теория не изучается в отрыве от практики. Для того чтобы успешно решать логарифмические уравнения , на которые в учебном плане отведено всего 3 часа, необходимо уверенное владение формулами для логарифмов и свойствами логарифмической функции. Тема « Логарифмические уравнения» в учебном плане идет за логарифмическими функциями и свойствами логарифмов.
- Ситуация несколько осложняется по сравнению с показательными уравнениями наличием ограничений на область определения логарифмических функций . Использование формул логарифма произведения, частного и других без дополнительных оговорок может привести как к приобретению посторонних корней, так и к потере корней . Поэтому необходимо внимательно следить за равносильностью совершаемых преобразований.

«Изобретение логарифмов, сократив работу астронома, продлило ему жизнь»

● **Тема: « Логарифмические уравнения.»**

Цели:

Образовательные:

1. Ознакомить и закрепить основные методы решения логарифмических уравнений, предупредить появления типичных ошибок.
2. Предоставить каждому обучающему возможность проверить свои знания и повысить их уровень.
3. Активизировать работу класса через разные формы работы.

Развивающие:

1. Развивать навыки самоконтроля.

Воспитательные:

1. Воспитывать ответственное отношение к труду.
2. Воспитывать волю и настойчивость, для достижения конечных результатов.

Ход урока.

1. *Организационный момент:*

2. *Актуализация опорных знаний;*

Упростите:

$\log_{25} 54 - \log_5 \sqrt{6}$	$\sqrt[3]{32}^{\frac{2}{5}}$	$\log_{\frac{1}{16}} \frac{1}{2}$	$\lg 18 - 2\lg \sqrt{6}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}$
$\lg_2 5 + \frac{1}{\lg 2}$	$\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27}$	$\log_2 3 \cdot \log_3 2$	$\log_3 27$	$\frac{\log_3 8 + \log_3 2}{\log_2 36 - \log_2 9}$
$\log_8 128$	$\log_{25} 14 - \log_{25} 2$	$\frac{\lg 54}{\lg 5} - \frac{\lg 6}{\lg 5}$	$\log_5 6 + \log_5 7$	$\log_{\sqrt{8}} 32$
$\frac{1}{2} \ln 9 + \ln 2$	$\log_2 5 + \frac{1}{\lg 2}$	$\frac{\lg 30}{\lg 3} + \frac{\lg 2}{\lg 3}$	$\log_5 5$	$2 \ln \sqrt{14} - \ln 7$

Определение: Уравнение, содержащее переменную под знаком логарифма, называется логарифмическим.

Простейшим примером логарифмического уравнения служит уравнение

$$\log_a x = b \quad (a > 0, a \neq 1, b > 0)$$

Способы решения

1. Решение уравнений на основании определения логарифма, например, уравнение $\log_a x = b$ ($a > 0, a \neq 1, b > 0$) имеет решение $x = a^b$.
2. Метод потенцирования. Под потенцированием понимается переход от равенства, содержащего логарифмы, к равенству, не содержащему их: если $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, то $f(x) = g(x)$, $f(x) > 0, g(x) > 0$, $a > 0, a \neq 1$.
3. Метод введения новой переменной.
4. Метод логарифмирования обеих частей уравнения.
5. Метод приведения логарифмов к одному и тому же основанию.
6. Функционально – графический метод.

1 метод:

На основе определения логарифма решаются уравнения, в которых по данным основаниям и числу определяется логарифм, по данному логарифму и основанию определяется число и по данному числу и логарифму определяется основание.

$$\begin{aligned}\log_2 4\sqrt{2} &= x, \\ 2^x &= 4\sqrt{2}, \\ 2^x &= 2^{5/2}, \\ x &= 5/2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log_{3\sqrt{3}} x &= -2, \\ x &= 3\sqrt{3}^{-2}, \\ x &= 3^{-3}, \\ x &= 1/27.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log_x 64 &= 3, \\ x^3 &= 64, \\ x^3 &= 4^3, \\ x &= 4.\end{aligned}$$

Решите уравнения:

$$\lg(x^2-6x+9) - 2\lg(x-7) = \lg 9.$$

Условие для проверки всегда составляем по исходному уравнению.

$$(x^2-6x+9) > 0, \quad x \neq 3,$$

$$x-7 > 0; \quad x > 7; \quad x > 7.$$

С начала нужно преобразовать уравнение привести к виду $\log \left(\frac{(x-3)}{(x-7)} \right)^2 = \lg 9$ применяя формулу логарифм частного.

$$\left(\frac{(x-3)}{(x-7)} \right)^2 = 9,$$

$$\frac{(x-3)}{(x-7)} = 3,$$

$$x-3 = 3x-21,$$

$$x=9.$$

$$\frac{(x-3)}{(x-7)} = -3,$$

$$x-3 = -3x+21,$$

$$x=6. \text{ посторонний корень.}$$

Проверка показывает 9 корень уравнения.

Ответ : 9

Решите уравнения:

$$\log_6^2 x + \log_6 x + 14 = (\sqrt{16 - x^2})^2 + x^2,$$

$$16 - x^2 \geq 0 ; \quad -4 \leq x \leq 4;$$

$$x > 0, \quad x > 0, \quad \text{О.Д.З. } [0, 4).$$

$$\log_6^2 x + \log_6 x + 14 = 16 - x^2 + x^2,$$

$$\log_6^2 x + \log_6 x - 2 = 0$$

$$\text{заменяем } \log_6 x = t$$

$$t^2 + t - 2 = 0 ; \quad D = 9 ; \quad t_1 = 1, \quad t_2 = -2.$$

$\log_6 x = 1, x = 6$ посторонний корень .

$\log_6 x = -2, x = 1/36$, проверка показывает $1/36$ является корнем .

Ответ : $1/36$.

Решите уравнения

$x^{\log_3 x^2} = 3x$, возьмем от обеих частей уравнения логарифм по основанию 3

Вопрос :

1. Это – равносильное преобразования ?
2. Если да то почему ?

Получим

$$\log_3 x^{\log_3 x^2} = \log_3 (3x)$$

Учитывая теорему 3, получаем : $\log_3 x^2 \log_3 x = \log_3 3x$,
 $2 \log_3 x \log_3 x = \log_3 3 + \log_3 x$,
 $2 \log_3^2 x = \log_3 x + 1$,
 $2 \log_3^2 x - \log_3 x - 1 = 0$,

заменяем $\log_3 x = t$, $x > 0$ $2t^2 + t - 2 = 0$; $D = 9$; $t_1 = 1$, $t_2 = -1/2$

● $\log_3 x = 1$, $x = 3$,

● $\log_3 x = -1/2$, $x = 1/\sqrt{3}$.

Ответ: $\{3 ; 1/\sqrt{3}\}$.

5 метод :

$$\text{Решить уравнения: } \log_9(37-12x) \log_{7-2x} 3 = 1,$$

$$37-12x > 0, \quad x < 37/12,$$

$$7-2x > 0, \quad x < 7/2, \quad x < 7/2,$$

$$7-2x \neq 1; \quad x \neq 3; \quad x \neq 3;$$

$$\log_9(37-12x) / \log_3(7-2x) = 1,$$

$$\frac{1}{2} \log_3(37-12x) = \log_3(7-2x),$$

$$\log_3(37-12x) = \log_3(7-2x)^2,$$

$$37-12x = 49 - 28x + 4x^2,$$

$$4x^2 - 16x + 12 = 0,$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0, \quad D=19, \quad x_1=1, \quad x_2=3, \quad 3 \text{ –посторонний}$$

корень .

Проверкой убеждаемся , что $x=1$ корень уравнения.

6 метод

Решите уравнения: $\log_3 x = 12 - x$.

Так как функция $y = \log_3 x$ возрастающая, а функция $y = 12 - x$ убывающая на $(0; +\infty)$ то заданное уравнение на этом интервале имеет один корень. Который легко можно найти. При $x=10$ заданное уравнение обращается в верное числовое равенство $1=1$. Ответ $x=10$.

Итог урока.

С какими методами решения логарифмических уравнений мы познакомились на уроке?

Домашние задание:

Определите метод решения и решите № 1547(а,б) ,
№1549(а,б), №1554(а,б) .

Проработать весь теоретический материал и разобрать примеры §52.

2 урок.

Тема урока: «Применение различных методов при решение логарифмических уравнений.»

Тип урока: Урок закрепления изученного

Ход урока.

1. *Организационный момент:*

2. *«Проверь себя»*

1) $\log_3 ((x-1)/5) = ?$

2) $\log_5 (121 - x^2), (121 - x^2) \geq 0, x < -11, x \geq 11.$

3) $3^{2x} = 5, \log_5 3 = 2x, x = (\log_5 3)/2.$

4) $9^{2\log_3 5} = 3^{4\log_3 5} = 4^5$

5) $\lg x^2 = 2\lg x.$

Каким способом можно решить данное уравнение ?
(метод введение новой переменной)

$$\log_3^2 x + 3 \log_3 x + 9 = 37 / \log_3 (x/27); \quad x > 0$$

Обозначим $\log_3 x = t$; $t^2 - 3t + 9 = 37 / (t-3)$; $t \neq 3$,

$$(t-3) (t^2 - 3t + 9) = 37,$$

$$t^3 - 27 = 37; \quad t^3 = 64; \quad t = 4.$$

$$\log_3 x = 4; \quad x = 81.$$

Проверкой убеждаемся, что $x=81$ корень уравнения.

- $\log_3 x$
X = 81 , возьмем от обеих частей уравнения логарифм по основанию 3;

$$\log_3 X^{\log_3 x} = \log_3 81; \quad \log_3 x \log_3 x = \log_3 81; \quad \log_3^2 x = 4;$$
$$\log_3 x = 2, \quad x = 9;$$
$$\log_3 x = -2, \quad x = 1/9.$$

Проверкой убеждаемся , что $x=9$ и $x=1/9$ корни уравнения.

4. Физкультминутка(за партами , сидя).

- 1 Областью определения логарифмической функции $y = \log_3 X$ является множество положительных чисел .
- 2 Функция $y = \log_3 X$ монотонно возрастает .
3. Область значений логарифмической функции от 0 до бесконечности.
- 4 $\log_a c/v = \log_a c - \log_a v$.
- 5 Верно , что $\log_8 8^{-3} = 1$.

№1704.(a)

$$1 - \sqrt{x} = \ln x$$

Так как функция $y = \ln x$ возрастающая, а функция

$y = 1 - \sqrt{x}$ убывающая на $(0; +\infty)$ то заданное уравнение на этом интервале имеет один корень. Который легко можно найти. При $x=1$ заданное уравнение обращается в верное числовое равенство $1=1$.

Ответ : $x=1$.

№ 1574(б)

$$\log_3 (x+2y) - 2\log_3 4 = 1 - \log_3 (x - 2y), \quad \log_3 (x^2 - 4y^2) = \log_3 48,$$

$$\log_{1/4} (x - 2y) = -1;$$

$$\log_{1/4} (x - 2y) = -1;$$

$$x^2 - 4y^2 - 48 = 0, \quad x = 4 + 2y, \quad x = 8,$$

$$x - 2y = 4; \quad 16y = 32; \quad y = 2.$$

Проверкой убеждаемся, что найденные значения являются решениями системы.

5. Что за прелесть Логарифмическая “комедия $2 > 3$ ”

$$1/4 > 1/8,$$

бесспорно правильно.

$(1/2)^2 > (1/2)^3$, тоже не внушающее сомнение. Большему числу соответствует больший логарифм, значит,
 $\lg(1/2)^2 > \lg(1/2)^3$; $2\lg(1/2) > 3\lg(1/2)$. После сокращения на $\lg(1/2)$ имеем
 $2 > 3$.

- Где ошибка?

6. Выполните тест:

1. Найдите область определения: $y = \log_{0,3} (6x - x^2)$.

1. $(-\infty ; 0) \cup (6 ; +\infty)$; 2. $(-\infty ; -6) \cup (0 ; +\infty)$; 3. $(-6 ; 0)$. 4. $(0 ; 6)$.

2. Найдите область значений: $y = 2,5 + \log_{1,7} x$.

1. $(2,5 ; +\infty)$; 2. $(-\infty ; 2,5)$; 3. $(-\infty ; +\infty)$; 4. $(0 ; +\infty)$.

3. Сравните: $\log_{0,5} 7$ и $\log_{0,5} 5$.

1. $>$. 2. $<$. 3. $=$.

4. Решите уравнение: $7 * 5^{\log_5 x} = x + 21$.

1. $(3,5)$. 2. нет решения. 3. $(-3,5)$. 4. (7) .

5. Найти значение выражения: $\log_4 (64c)$ если $\log_4 c = -3,5$.

1. $(-6,5)$. 2. $(-0,5)$ 3. $(-10,5)$ 4. $(-67,5)$.

Ответ: 4; 3;2;1;2.

Итог урока: Чтобы хорошо решать логарифмические уравнения , нужно совершенствовать навыки решения практических заданий ,так как они являются основным содержанием экзамена и жизни.

Домашние задания : № 1563(а,б), №1464(б,в) ,
№ 1567 (б).

урок 5.

Тема урока: «Решение логарифмических уравнений»

Тип урока: урок обобщения, систематизация знаний.

Ход урока.

1.Актуализация опорных знаний:

№1 Какие из чисел -1; 0; 1; 2; 4; 8 являются корнями уравнения $\log_2 x = x - 2$?

№2 Решить уравнения: а) $\log_{16} x = 2$; в) $\log_2 (2x - x^2) = 0$;
г) $\log_3 (x - 1) = \log_3 (2x + 1)$

№3 Решить неравенства: а) $\log_3 x > \log_3 5$; б) $\log_{0,4} x < 1$;
в) $\log_2 (x - 4) > 0$.

№4 Найдите область определения функции: $y = \log_2 (x + 4)$

№5 Сравните числа: $\log_3 6/5$ и $\log_3 5/6$; $\log_{0,2} 5$ и $\log_{0,2} 17$.

№6 Определить число корней уравнения: $\log_3 X = -2x + 4$.

2. Решение уравнений:

1. решите уравнения: $\log_5^2 (x-3)^2 + 3 \log_5 (15 - 5x) - 10 = 0$.

ОДЗ: $15 - 5x > 0$, $x < 3$.

$$\log_5^2 (x-3)^2 + 3 \log_5 (5 (3 - x)) - 10 = 0,$$

$$(2 \log_5 (x-3))^2 + 3 \log_2 (3 - x) + 3 - 10 = 0, \quad 4 \log_5^2 (3-x)^2 + 3 \log_2 (3 - x) - 7 = 0,$$

Пусть $\log_5 (3-x) = t$; $4 t^2 - 3 t - 7 = 0$,

$$t = -7/4 ; t = 1 .$$

$$\log_5 (3-x) = -7/4,$$

$$3-x = 5^{-7/4},$$

$$x = 3 - 1/5^{7/4}.$$

и

$$\log_5 (3-x) = 1,$$

$$3-x = 5,$$

$$x = -2.$$

Ответ: $\{ 3 - 1/5^{7/4}; -2 \}$.

Решите уравнения: $3\log_4 (2 + 30/(2x-11)) = 2\log_4 (2 - 15/(x+2)) + 8$.

$$2 + 30/(2x-11) = (4x-22+30)/(2x-11) = (4x+8)/(2x-11) = 4(x+2)/(2x-11)$$
$$2 - 15/(x+2) = (2x+4-15)/(2+x) = (2x-11)/(x+2) = ((x+2)/(2x-11))^{-1},$$

$$3 \log_4 (4(x+2)/(2x-11)) = 2\log_4 ((x+2)/(2x-11))^{-1} + 8,$$

$$3 + 3 \log_4 ((x+2)/(2x-11)) = -2\log_4 ((x+2)/(2x-11)) + 8,$$

Пусть $\log_4 ((x+2)/(2x-11)) = t$, $3 + 3t = -2t + 8$, $t = 1$.

$$\log_4 ((x+2)/(2x-11)) = 1, (x+2)/(2x-11) = 4,$$

$x+2=8x-44$, $x=46/7$. Проверкой убеждаемся, что $x=46/7$ корень уравнения.

3. Физкультминутка:

- 1. $3^{\log_3 8} = 8$.
- 2. $\lg x = -2$, решением данного уравнения является 100.
- 3. Функция $y = \log_{4/3} x$ монотонно возрастает.
- 4. $\log_a (x+y) = \log_a x + \log_a y$.
- 5. $\log_a (x+y) = \log_a x - \log_a y$.
- 6. $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$.

4. Учимся на чужих ошибках :

Воспользуемся формулой преобразования суммы логарифмов логарифм произведения. Получим уравнения $\log_3 (x - 1) (x - 3) = 1$, отсюда следует

$$x^2 - 4x + 3 = 3.$$

Корнями последнего уравнения являются $x_1 = 0$ и $x_2 = 4$,

Ответ : {0 , 4}.

Решите уравнения: $\log_3 (x - 1) + \log_3 (x - 3) = 1$.

- Решите уравнения $\log_2 (x + 1) - \log_2 (x - 2) = 2$.
- Воспользуемся формулой преобразования разности логарифмов логарифм частного, получаем $\log_2 (x + 1) / (x - 2) = 2$, откуда следует $(x + 1) / (x - 2) = 2$.
- Решив последнее уравнения ,находим $x = 5$.
- Ответ: $x = 5$.

5. Программированный контроль

Задание						Отв ты
Вариант 1 	Вариант 2	Вариант 3	1	2	3	4
$g(3x-8) = \lg(x-2)$	$\log_3(5-2x) = 1$	$\text{Log}_2(4x-5) = \log_2(x-14)$	-3	1	3	Кор. нет.
$\text{Lg}^2x + \lg x = 8$	$\log_3^2x + 3 \log_3x + 9 = 37 / \log_3$	$\text{Lg}^2x - 6 \lg x + 5 = 0$	Кор. нет.	100; 0,0001	10000 0; 10	25; 0,2
$\text{Log}_2(x-2) + \log_2(x+1) = 2$	$\text{Log}_2(x+14) + \log_2(x+2) = 6$	$\text{Log}_5(x+1) + \log_5(x+5) = 1$ 2;	2; -18	0	2	3

Ответ : 1.вариант (3;2;4.) 2.вариант – (2;4;3.) 3.вариант – (4;3;2.)

Итог урока:

Пренебрегать теорией нельзя ,в этом мы с вами убедились на уроке :

- Без знания теоретического материала невозможно уверенно решать практические задания.
- Определенная часть вопросов направлена на проверку именно теоретических знаний , используемых правил , определений и теорем.

Домашние задания : №1568 (а.б) ,№ 1562 (а,б) №1573 (г).