

# Множество КОМПЛЕКСНЫХ чисел.

**Комплексным числом** называется выражение вида  $a + bi$ , в котором  $a$  и  $b$  – действительные числа, а  $i$  – некоторый символ такой, что

$$i^2 = -1$$

Действительное число  $a$  называется **действительной частью**  $z=a+bi$  ( $\operatorname{Re} z$ ), а число  $b$  – **мнимой частью** ( $\operatorname{Im} z$ )

Комплексное число  $z=a+bi$  изображают точкой плоскости с координатами  $(a;b)$

Точка  $M(a;b)$ , соответствующая комплексному числу  $z=a+bi$ , называется **аффиксом** данного числа  $z$ .

Два комплексных числа  $(a; b)$  и  $(c; d)$  называются **равными**, если  $a = c$  и  $b = d$ .

Комплексное число  $a-bi$  называется комплексно **сопряженным** с числом  $a+bi$  и обозначается через  $\bar{z}$

$$\bar{z} = \overline{a + bi} = a - bi$$

Комплексные числа вида  $a+bi$  и  $-a-bi$  называются **противоположными**.

# Арифметические операции над КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ

**Суммой** комплексных чисел  $z = (a; b)$  и  $w = (c; d)$  называется комплексное число  $(a+c; b+d)$ .

**Разностью** комплексных чисел  $z = (a; b)$  и  $w = (c; d)$  называют такое число, которое в сумме с числом  $w$  даёт число  $z$

$$z = w + u.$$

**Справедливо следующее правило:**

$$(a; b) - (c; d) = (a - c; b - d).$$

**Произведением** комплексных чисел  $z = (a; b)$  и  $w = (c; d)$  называют комплексное число  $(ac - bd; ad + bc)$

**Частным** от деления  $z$  на  $w$  называют число  $u$ , равное:

$$u = \left( \frac{ac + bd}{c^2 + d^2}; \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \right)$$

## Нахождение степеней числа $i$

Если показатель степени  $i$  делится на 4, то значение степени равно 1, если при делении показателя на 4 в остатке получается 1, то значение степени равно  $i$ , если при делении показателя на 4 остаток равен 2, то значение степени равно  $-1$ , если в остатке при делении показателя на 4 будет 3, то значение степени равно  $-i$ .

- Вычислить: 1)  $i^{66}$ , 2)  $i^{143}$ , 3)  $i^{216}$ , 4)  $i^{137}$

Решение:

1)  $i^{66}$

$66:4=16(2)$ . Остаток равен 2, значит  $i^{66}=-1$

2)  $i^{143}$

$143:4=35(3)$ . В остатке 3, значит  $i^{143}=-i$

3)  $i^{216}$

$216:4=54(0)$ . В остатке 0, значит  $i^{216}=1$

4)  $i^{137}$

$137:4=34(1)$ . В остатке 1, значит  $i^{137}=i$

## Пример 1

Вычислить:  $(1 + 2i)i - \frac{3 + 2i}{1 - i}$

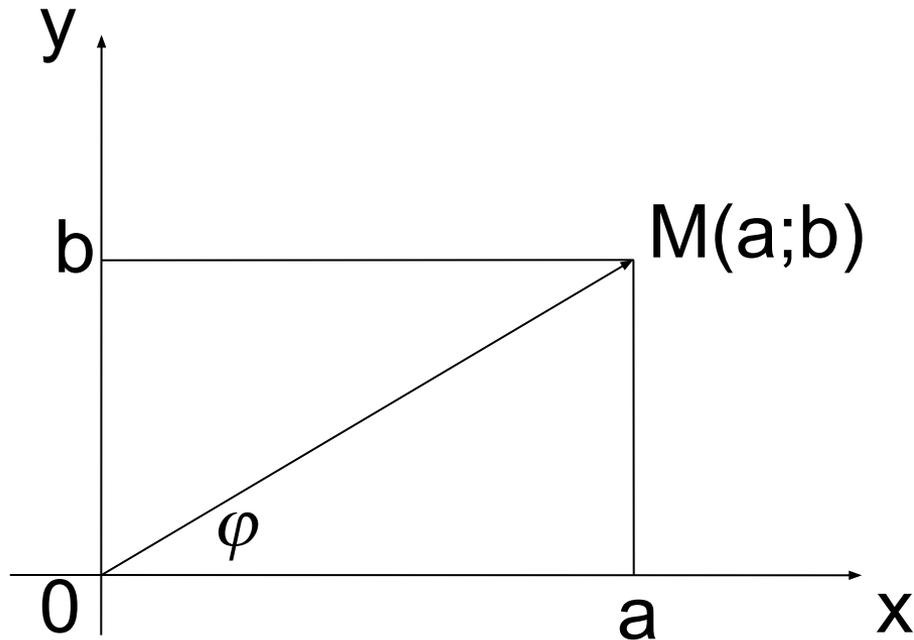
$$1)(1 + 2i)i = i + 2i^2 = -2 + i$$

$$2)\frac{3 + 2i}{1 - i} = \frac{(3 + 2i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{3 + 2i + 3i + 2i^2}{1 - i^2} = \frac{3 + 5i - 2}{1 + 1} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$$

$$3)(-2 + i) - \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{2}i\right) = -\frac{5}{2} - \frac{3}{2}i$$

# Геометрический смысл комплексного числа

Каждой точке  $M$  плоскости с координатами  $(a, b)$  соответствует один и только один вектор  $\overrightarrow{OM} = \vec{z}$  с началом в точке  $z = 0$  и концом в точке  $z = a + bi$



Если комплексное число  $Z = a + bi$  трактовать как точку  $M(a, b)$  плоскости  $xOy$ , то модуль  $Z$  равен расстоянию точки  $M(a, b)$  от начала координат

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Если на плоскости ввести полярные координаты  $(r, \varphi)$ , где  $\varphi$  **аргумент** числа  $z$  ( $\varphi = \arg z$ ) - угол между действительной осью  $Ox$  и вектором  $OM$ , то  **$a = r \cos \varphi$ ,  $b = r \sin \varphi$**

В силу этого комплексное число  $Z$  можно записать в форме  **$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$** , где  $r$  – модуль числа  $Z$ ,  $\varphi$  – угол (в рад.), который составляет вектор  $OM$  с положительным направлением оси  $ox$

# Тригонометрическая форма комплексного числа

*Тригонометрической формой* комплексного числа называют его запись в виде:

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ , где  $r = \sqrt{a^2 + b^2}$  - модуль, а

$\varphi$  - аргумент числа  $z$ , связанный с  $a$  и  $b$  формулами:

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}};$$

$$\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Угол  $\varphi$  из промежутка  $[-\pi; \pi]$  называется главным аргументом. Все остальные значения угла  $\varphi$  могут быть получены прибавлением к главному аргументу значений  $2\pi n$ , где  $n$  - любое целое число.

## Пример2.

Записать в тригонометрической форме:  $-2\sqrt{3} + 2i$

Сначала находим модуль числа:  $r = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + 2^2} = 4$

Далее, согласно формулам (\*),

имеем:  $\cos \varphi = -\frac{2\sqrt{3}}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \sin \varphi = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Учитывая, что угол  $\varphi \in [-\pi; \pi]$   $\varphi = \frac{5\pi}{6}$

Итак,  $z = 4 \left( \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)$

# Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме

При умножении/делении комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, их модули перемножаются /делятся, а аргументы складываются (вычитаются).

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \quad (1)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) \quad (2)$$

**Пример3.** Выполнить действия:

$$4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) * \frac{1}{10}\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

Используя формулу (1), находим:

$$\frac{4}{10}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3}\right)\right) = \frac{2}{5}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = -\frac{2}{5}i$$

При возведении комплексного числа  
 **$z = r (\cos\varphi + i\sin\varphi)$**  в натуральную степень  
 $n$

модуль данного числа возводится в эту степень,  
а аргумент умножается на показатель степени:

**формула Муавра**

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)(4)$$

Корень  $n$ -й степени из комплексного числа  $z$   
 $= r (\cos\varphi + i\sin\varphi)$  имеет  $n$  различных значений,  
которые находятся по формуле :

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right) (3)$$

Здесь  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$

**Пример4.** Решить уравнение  $z^2 + 4 = 0$

Корнями данного уравнения являются все значения  $\sqrt{-4}$

Для числа  $-4$  имеем  $r = 2$ ,

Согласно формуле(3),

находим: 
$$\sqrt{-4} = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi + 2\pi k}{2} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{2} \right)$$

Если  $k = 0$ , то 
$$\omega_1 = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = \sqrt{2}i$$

Если  $k = 1$ , то 
$$\omega_2 = \sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) = -\sqrt{2}i$$

# Показательная форма комплексного числа. Формула Эйлера

Если комплексному числу  $(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ , модуль которого равен 1, поставить в соответствие показанное выражение  $e^{i\varphi}$ , то получим

соотношение

$$\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}$$

то получим соотношение которое называется **формулой Эйлера**.

можно записать в

Любое комплексное число  $z$  в виде

$$z = r e^{i\varphi}$$

. Эта форма записи комплексного числа называется **показательной формой**.

**Пример:** Записать число в показательной форме.

$$z = 3\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$$

**Решение:** Здесь  $r = 3$ ,  $\varphi = \frac{3\pi}{2}$

тогда показательная форма числа имеет вид

$$z = 3e^{i\frac{3\pi}{2}}$$

**Пример:** Записать число  $z = -5i$  в показательной форме.

**Решение.** Что бы представить число  $z$  в виде  $z = re^{i\varphi}$  нужно найти модуль и аргумент числа  $z$ .  
Здесь  $a = 0$ ,  $b = -5$ ; тогда  $r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{0 + (-5)^2} = 5$ ,  $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ , так как точка  $z$  лежит на мнимой оси комплексной плоскости.  
Зная  $r$  и  $\varphi$ , получим

$$z = 5e^{\frac{3\pi}{2}i}$$

- **Действия над комплексными числами, заданными в показательной форме**

*Если комплексные числа записаны в показательной форме, то умножение, деление, возведение в степень производится по правилам действий со степенями.*

Так, для произведения и частного комплексных чисел

$z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$  и  $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$  справедливы формулы

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

а для  $n$ -й степени комплексного числа используется

- формула  $z^n = r^n e^{i\varphi n}$

Для вычисления корня из комплексного числа

$$z = re^{i\varphi}$$

используется формула

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{\frac{\varphi + 2\pi k}{n}}$$

где  $k$  принимает  $n$  значений:  $0, 1, 2, \dots, n-1$ .

# Понятие функции комплексного переменного и отличие от действительного анализа

Пусть  $D$  – некоторая область на комплексной плоскости

**Определение.** *Функцией комплексного аргумента* с областью определения  $D$  называется соответствие, которое любому комплексному числу  $z \in D$  сопоставляет одно или несколько комплексных значений.

Таким образом, в отличие от действительного анализа, в комплексном анализе допускаются многозначные функции.

Например,

$f(z) = az + b$  ( $a, b$  – фиксированные комплексные числа) – однозначная функция;

$f(z) = z^2$  – однозначная функция

$f(z) = \sqrt[n]{z}$  - n-значная функция;

$f(z) = \text{Arg}z$  -бесконечнозначная функция.

Если функция однозначна, то она может быть задана в виде отображения  $f : D \rightarrow C$  В таком случае функция называется **однолистной** .В дальнейшем, если не указано особо, будем рассматривать однолистные функции.

Пример: Для функции  $f(z) = \frac{z^2 + 1}{2i} + 1$  найти  $f(i)$

Решение: Подставим в место  $z$  значение  $i$  в функцию

$$f(i) = \frac{i^2 + 1}{2i} + 1 = \frac{-1 + 1}{2i} + 1 = 0 + 1 = 1$$

Ответ:  $f(i) = 1$

## Компоненты функции

Пусть дана функция ,  $f(z)$   $z \in D$  Представим  $z$  в алгебраической форме  $z = x + iy$  Значение  $f(z)$ - комплексное число, т.е.  $f(z) \in \mathbb{C}$ , которое также можем представить в алгебраической форме  $f(z) = u(z) + iv(z)$ , где  $u(z)$  и  $v(z)$  действительные функции комплексного аргумента, но задание  $f(z)$  эквивалентно заданию пары  $(x, y)$ .

Окончательно, любую функцию комплексного аргумента можно представить в виде

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \text{ где } u(x, y) \text{ и } v(x, y) -$$

действительные функции двух действительных переменных. Функции  $u$  и  $v$  называются компонентами функции  $f(z)$ ,  $u$ - действительная компонента,  $v$ -мнимая компонента. Пишут :

$$u = \operatorname{Re} f(z) \quad v = \operatorname{Im} f(z)$$

Пример: Для функции  $f(z) = (x + iy)^2 + 4i$   
Где  $z = x + iy$  найти ее действительную и  
мнимую часть.

Решение:

$$(x+iy)^2+4i=x^2+2ixy-y^2+4i=(x^2-y^2)+(2xyi+4i)=(x^2-y^2)+i(2xy+4).$$

Тогда действительная часть функции  $f(z)$  -  $x^2-y^2$ , а  
мнимая -  $2xy+4$ .

$$\operatorname{Re}(f(z)) = x^2 - y^2$$

$$\operatorname{Im}(f(z)) = 2xy + 4$$

Понятие **непрерывности** определяется аналогично действительному случаю.

$f(z)$ -непрерывна в точке  $z_0 \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon)$

$|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$  Так как это определение формально совпадает с обычным, то все свойства непрерывной функции комплексного аргумента совпадают дословно со свойствами действительных функций.