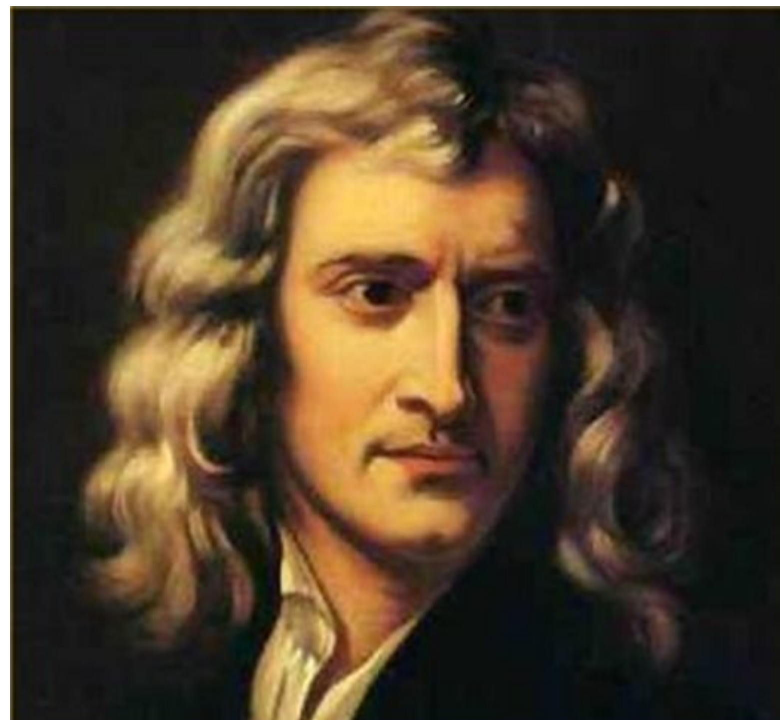
# Треугольник Паскаля
# Бином Ньютона

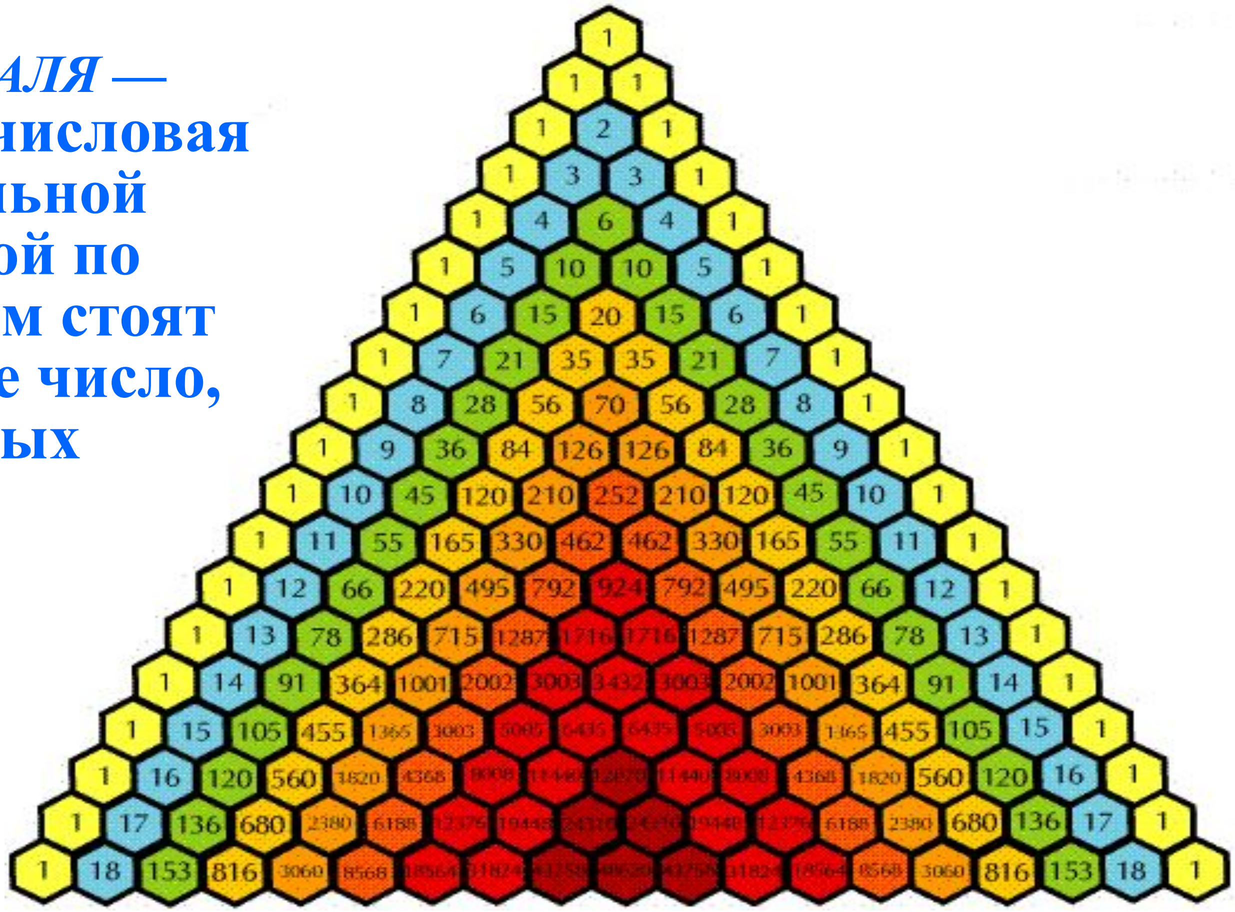
# Блез Паскаль

Самой известной математической работой Блеза Паскаля является ***"Трактат об арифметическом треугольнике"*** **(треугольник Паскаля)**, который имеет применение в теории вероятностей и обладает удивительными и занимательными свойствами

# Треугольник Паскаля

**Определение:**

***ТРЕУГОЛЬНИК ПАСКАЛЯ*** **— это бесконечная числовая таблица "треугольной формы", в которой по боковым сторонам стоят единицы и всякое число, кроме этих боковых единиц.**



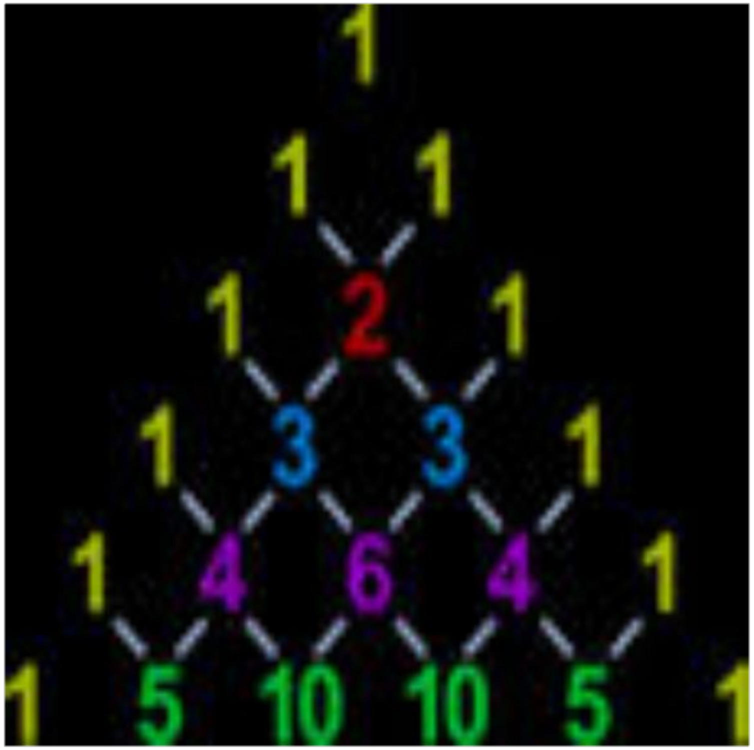
# Треугольник Паскаля

**Свойства:**

Если очертить треугольник Паскаля, то получится равнобедренный треугольник. В этом треугольнике на вершине и по бокам стоят единицы.

***Каждое число равно сумме двух расположенных над ним чисел.***

**Например:**
**2=1+1**
**3=1+2**
**6=3+3 и т.д.**

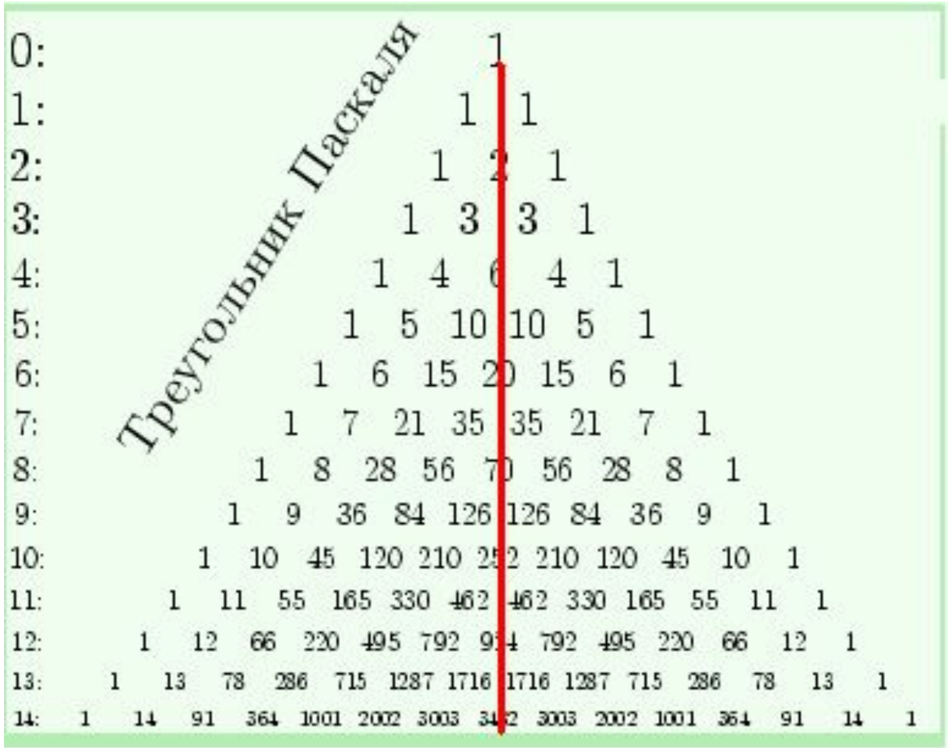



Продолжать треугольник можно бесконечно.

# Треугольник Паскаля

**Свойства:**

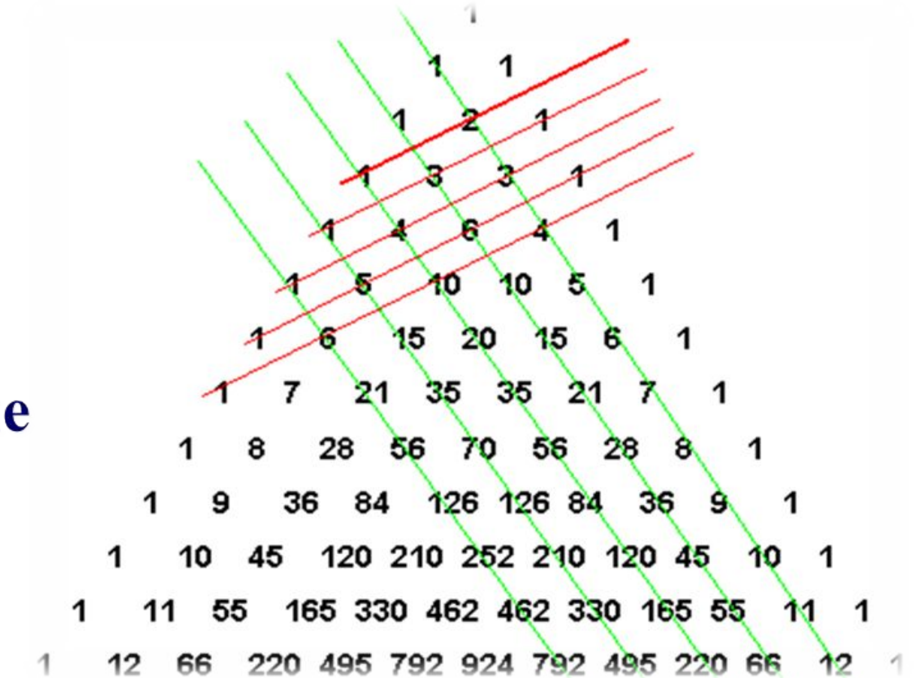
**Строки треугольника симметричны относительно вертикальной оси.**



# Треугольник Паскаля

## Свойства:

Вдоль прямых, параллельных сторонам треугольника (на рисунке отмечены **зелеными линиями**)выстроены **треугольные числа** и их обобщения на случай пространств всех размерностей.



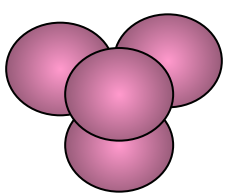

**Треугольные числа** показывают, сколько касающихся кружков можно расположить в виде треугольника

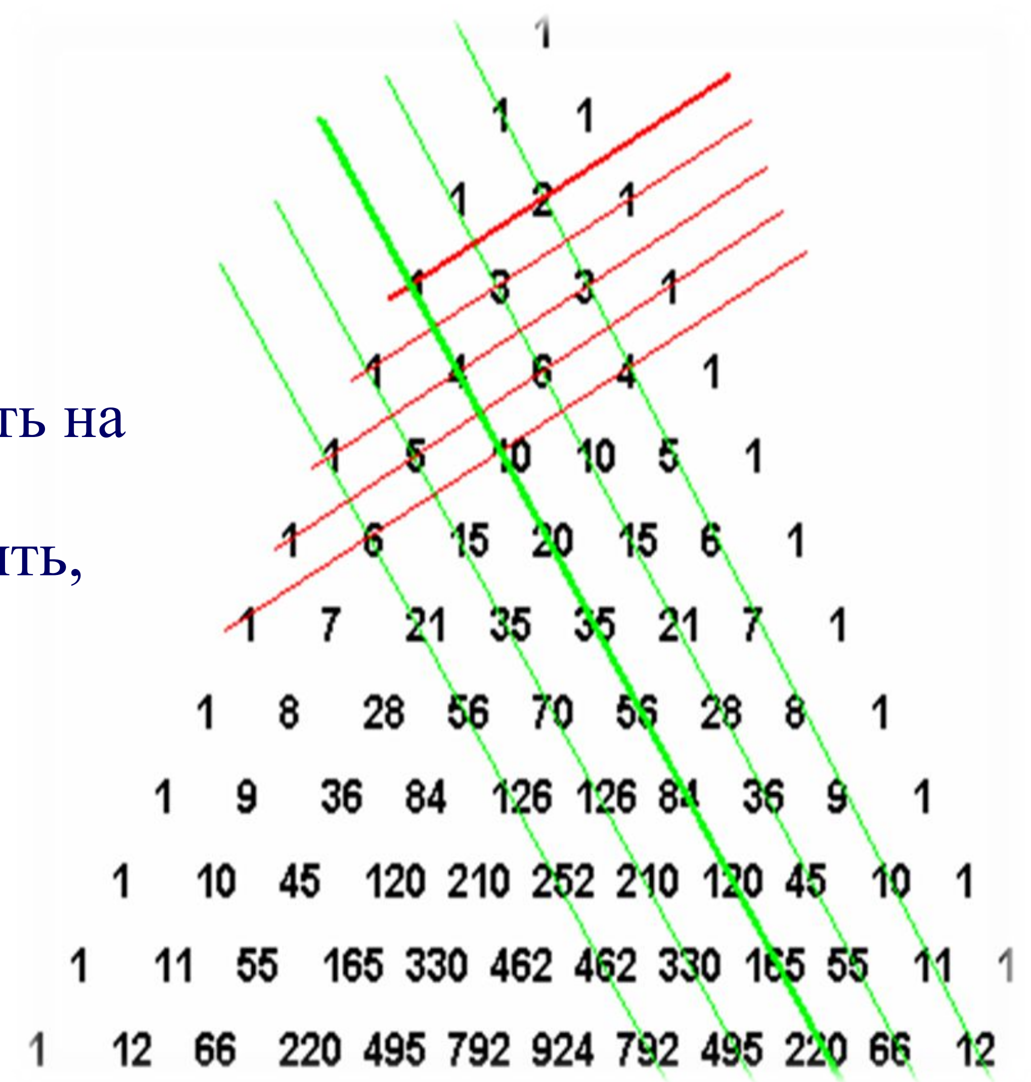
**Классический пример:** начальная расстановка шаров в бильярде.

# Треугольник Паскаля

## Свойства:

Следующая зеленая линия
покажет нам
**тетраэдральные** числа –
один шар мы можем положить на
три – итого четыре, под три
подложим шесть - итого десять,
и так далее.

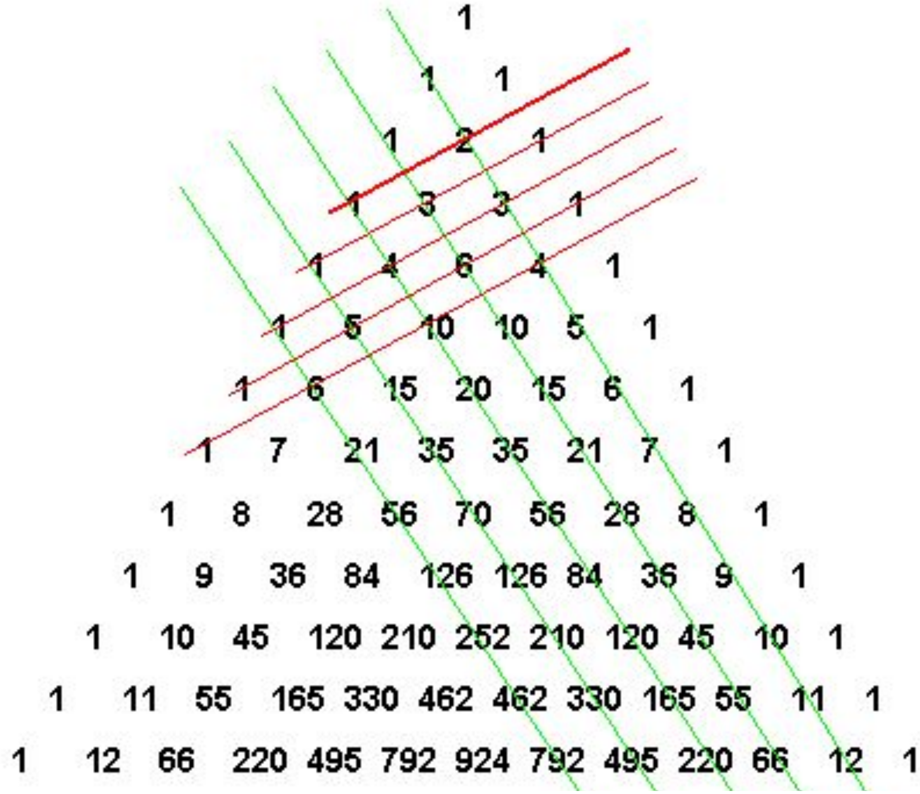




# Треугольник Паскаля

**Свойства:**

Следующая зеленая линия **(1, 5, 15, 35,...)** продемонстрирует попытку выкладывания гипертетраэдра в четырехмерном пространстве - один шар касается четырех, а те, в свою очередь, десяти...



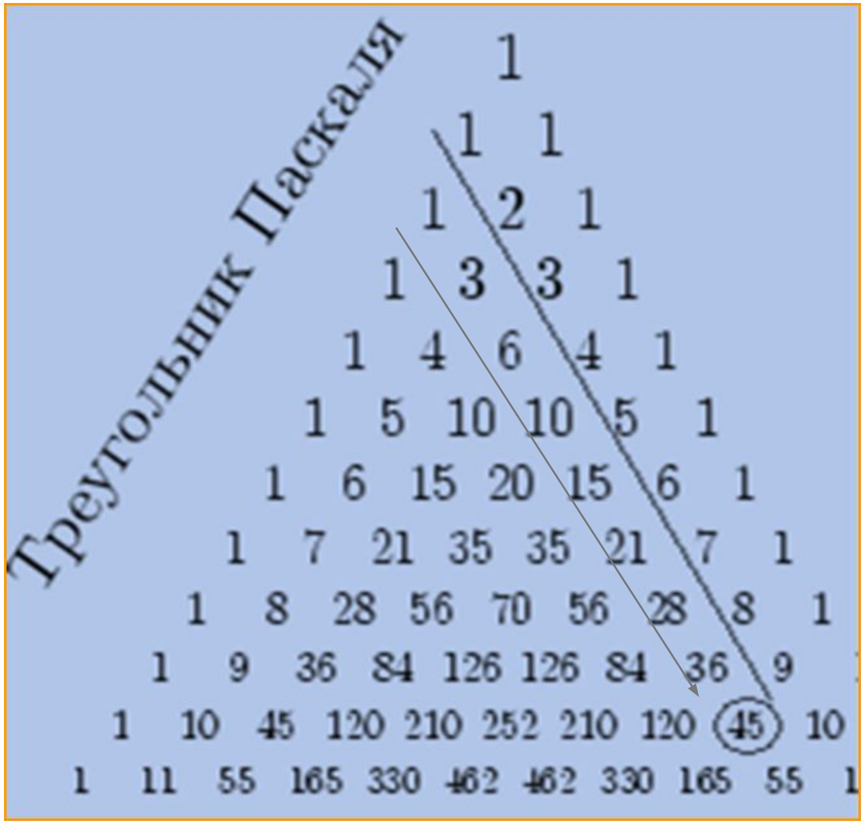

В нашем мире такое невозможно, только в четырехмерном, виртуальном пространстве.

# Треугольник Паскаля

## Применение:

Чтобы найти сумму чисел, стоящих на любой диагонали от начала до интересующего нас места, достаточно взглянуть на число, расположенное снизу и слева от последнего слагаемого.

Пусть, например, мы хотим вычислить сумму чисел натурального ряда от 1 до 9. "Спустившись" по диагонали до числа 9, мы увидим слева снизу от него число 45. Оно то и дает искомую сумму.




Чему равна сумма первых восьми треугольных чисел? Отыскиваем восьмое число на второй диагонали и сдвигаемся вниз и влево. Ответ: 120.

# Треугольник Паскаля

**Применение:**

**Биномиальные коэффициенты есть коэффициенты разложения многочлена по степеням *x* и *y***

| | | |
|---|---|---|
| $(a+b)^0 =$ | $1$ | 1 |
| $(a+b)^1 =$ | $a+b$ | 1 1 |
| $(a+b)^2 =$ | $a^2+2ab+b^2$ | 1 2 1 |
| $(a+b)^3 =$ | $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ | 1 3 3 1 |
| $(a+b)^4 =$ | $a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$ | 1 4 6 4 1 |
| $(a+b)^5 =$ | $\dots$ | 1 5 10 10 5 1 |
| $(a+b)^6 =$ | $\dots$ | . . . . . . . . . . . . . . . |

# Бином Ньютона.

**«Би»-удвоение, раздвоение …**

**«Ном»(фран. nombre) –номер, нумерация.**

**«Бином» -»два числа»**

Числа, стоящие во второй, третьей и четвертой строках треугольника Паскаля, появляются при возведении двучлена (бинома) a+b в первую, вторую (квадрат) и третью (куб) степень

# Треугольник Паскаля:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

# Степени суммы двух чисел:

$$(a+в)^1 = a+в;$$

$$(a+в)^2 = a^2 + 2\cdot aв + в^2;$$

$$(a+в)^3 = a^2 + 3\cdot a^2в + 3\cdot aв^2 + в^3$$

# Треугольник Паскаля:

$$C_0^0$$

$$C_1^0\,C_1^1$$

$$C_2^0\,C_2^1\,C_2^2$$

$$C_3^0\,C_3^1\,C_3^2\,C_3^3$$

$$C_4^0\,C_4^1\,C_4^2\,C_4^3\,C_4^4$$

$$\ldots$$

# Степени суммы двух чисел:

$$(a+в)^1 = C_1^0 a^1 в^0 + C_1^1 a^0 в^1;$$

$$(a+в)^2 = C_2^0 a^2 в^0 + C_2^1 a^1 в^1 + C_2^2 a^0 в^2;$$

$$(a+в)^3 = C_3^0 a^3 в^0 + C_3^1 a^2 в^1 + C_3^2 a^1 в^2 + C_3^3 a^0 в^3;$$

# Правило Паскаля:

$$C_{m+1}^{n} = C_{m}^{n-1} + C_{m}^{n}$$

# Биноминальные коэффициенты:

$$C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

$$O! = 1$$

$$C_m^0 = C_m^m = 1$$

$$C_m^1 = C_m^{m-1} = m$$

# Биноминальные коэффициенты:

$$C_{m+1}^{n} = C_{m}^{n-1} + C_{m}^{n}$$

$$C_{m-1}^{n} + C_{m-1}^{n-1} + C_{m}^{n}$$

$$C_{m}^{0} + C_{m}^{1} + ... + C_{m}^{m-1} + C_{m}^{m} = 2^{m}$$

# *4* степень суммы двух чисел*:*

$$(a+b)^4=(a+b)^3\cdot(a+b)$$

$$\left(C_3^0\cdot a^3+C_3^1\cdot a^2\cdot b+C_3^2\cdot a\cdot b^2+C_3^3\cdot b^3\right)\cdot(a+b)$$

$$C_3^0\cdot a^4+C_3^1\cdot a^3\cdot b+C_3^2\cdot a^2\cdot b^2+C_3^3\cdot a\cdot b^3$$

$$+C_3^0\cdot a^3\cdot b+C_3^1\cdot a^2\cdot b^2+C_3^2\cdot a\cdot b^3+C_3^3\cdot b^4$$

$$C_3^0\cdot a^4+\left(C_3^1+C_3^0\right)\cdot a^3\cdot b+\left(C_3^2+C_3^1\right)\cdot a^2\cdot b^2$$

$$+\left(C_3^3+C_3^2\right)\cdot a\cdot b^3+C_3^3\cdot b^4$$

# *4* степень суммы двух чисел*:*

Учитывая, что:

$$C_3^0 = C_4^0 \qquad C_3^1 + C_3^0 = C_4^1 \qquad C_3^2 + C_3^1 = C_4^2$$

$$C_3^3 + C_3^2 = C_4^3 \qquad C_3^3 = C_4^4$$

Получаем формулу:

$$(a+b)^4$$

$$C_4^0 \cdot a^4 + C_4^1 \cdot a^3 \cdot b + C_4^2 \cdot a^2 \cdot b^2 + C_4^3 \cdot a \cdot b^3 + C_4^4 \cdot b^4$$

# Бином Ньютона:

$$(a+b)^m =$$

$$C_m^0 a^m + C_m^1 a^{m-1}\mathrm{b} + \ldots + C_m^{m-1} a b^{m-1} + C_m^m b^m$$

$$\sum_{k=0}^{m} C_m^k \cdot a^{m-k} \cdot b^k$$

# Задачи:

1. Вычислите:

а) $\frac{20!}{5!\cdot16!}$ ; б) $\frac{P_6 - P_5}{5!}$ ; в) $\frac{A_{20}^6 + A_{20}^5}{A_{20}^4}$ ; г) $\frac{P_6\cdot(C_7^5 + C_7^4)}{A_{10}^7}$

2. Найдите n, если:

а) $A_n^5 = 18\cdot A_{n-2}^4$ ; б) $A_n^4\cdot P_{n-4} = 42\cdot P_{n-2}$; в) $12\cdot C_{n+3}^{n-1} = 55\cdot A_{n+1}^2$ ; г) $12\cdot C_n^1 + C_{n+4}^2 = 126$

3. Возведите в степень:

а) $(x+1)^7$ ; б) $(x-y)^5$ ; в) $(1+i)^6$ ; г) $(x^2-y)^6$ ; д) $(3\cdot a^2 - 2\cdot b)^5$

***Треугольник Паскаля так прост, что выписать его сможет даже десятилетний ребенок. В то же время он таит в себе неисчерпаемые сокровища и связывает воедино различные аспекты математики, не имеющие на первый взгляд между собой ничего общего. Столь необычные свойства позволяют считать треугольник Паскаля одной из наиболее изящных схем во всей математике[2].***

Мартин Гарднер