РАССМАТРИВАЯ ПАРАБОЛУ.

(по материалам «Математического клуба “Кенгуру”»)

Аполлоний Пергский (Ἀπολλώνιος ὁ Περγαῖος, Перге, 262 до н. э. — 190 до н. э.) — древнегреческий математик, один из трёх (наряду с Евклидом и Архимедом) великих геометров античности, живших в III веке до н. э.

Аполлоний прославился в первую очередь монографией *«Конические сечения»* (8 книг), в которой дал содержательную общую теорию эллипса, параболы и гиперболы.

Именно Аполлоний предложил общепринятые названия этих кривых; до него их называли просто «сечениями конуса». Он ввёл и другие математические термины, латинские аналоги которых навсегда вошли в науку, в частности: асимптота, абсцисса, ордината, аппликата

«Парабола» означает приложение или притча.

Долгое время так называли линию среза конуса, пока не появилась квадратичная функция.

Подумаем, как можно получить массу информации о коэффициентах квадратного трехчлена $y = ax^2 + bx + c$, рассматривая его график — параболу.

Сначала напомним хорошо известные факты.

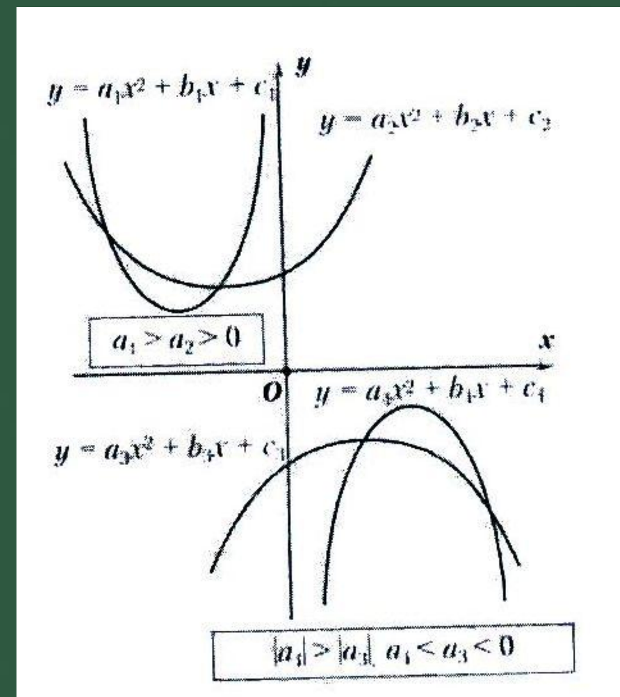
1) Знак коэффициента a (при x^2) показывает направление ветвей параболы:

$a > 0$ — ветви вверх;

$a < 0$ — ветви вниз.

Модуль коэффициента a отвечает за «крутизну» параболы:

чем больше $|a|$, тем «круче» парабола.



2) Коэффициент b (вместе с a) определяет абсциссу вершины параболы: $x_0 = -\frac{b}{2a}$

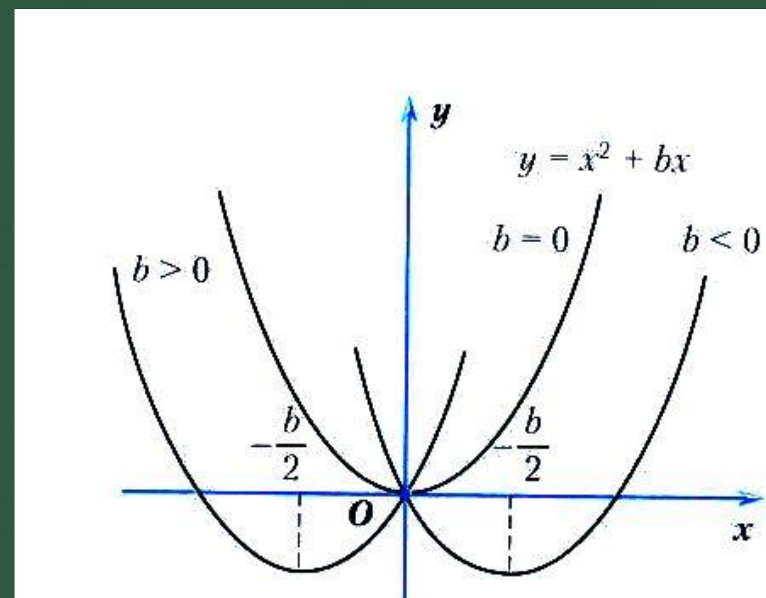
В частности, при $a = 1$ абсцисса вершины квадратного трехчлена $y = x^2 + bx + c$ равна $x_0 = -\frac{b}{2}$

<u>При $b > 0$</u>

вершина расположена левее оси Oy,

<u>при $b < 0$</u> — правее,

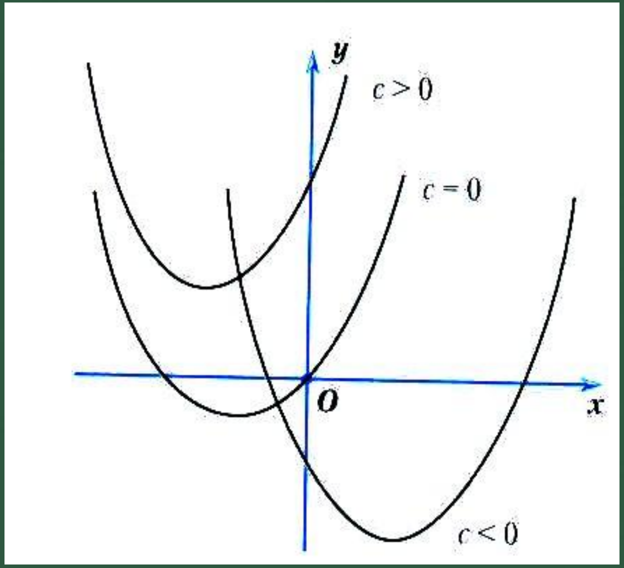
<u>при $b = 0$</u> — на оси Oy



3) Сохраняя коэффициенты *a* *и* *b*

и изменяя **с**, мы будем «поднимать» и «опускать» параболу вдоль оси оу.

Как «прочитать» на чертеже значение **с**?



Ясно, что $c = y(0)$ — ордината точки пересечения параболы с осью *Oy*.

Упражнение № 1.

Для каждого из квадратных трехчленов:

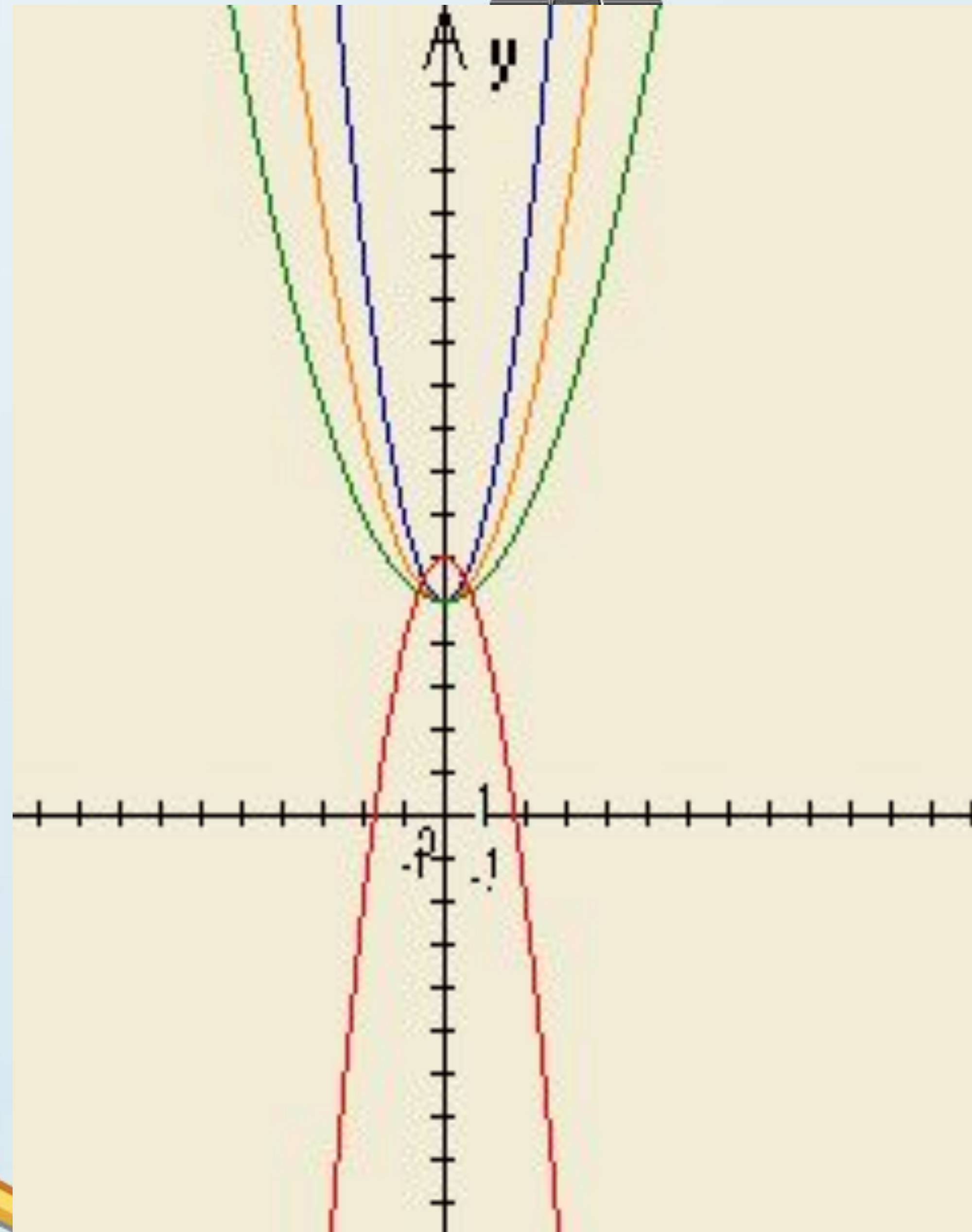
$$y = x^2 + 5;$$

$$y = 6 - 2x^2;$$

$$y = 2x^2 + 5;$$

$$y = \frac{1}{2}x^2 + 5$$

найдите на чертеже его график.



Решение .

Упражнение 1

$a > 0$ — ветви вверх; $a < 0$ — ветви вниз.

чем больше $|a|$, тем «круче» парабола.

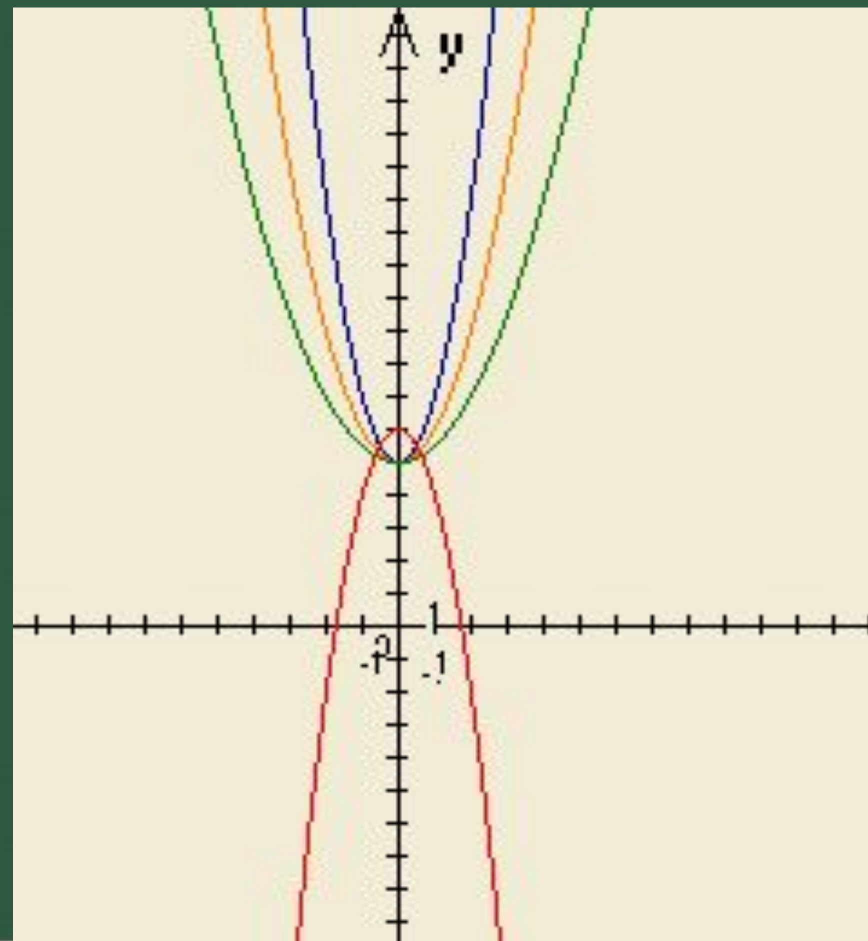
Значит:

$y = x^2 + 5;$

$y = 2x^2 + 5;$

$y = \frac{1}{2}x^2 + 5;$

$y = 6 - 2x^2;$



Упражнение №2

Для каждого их квадратных трехчленов

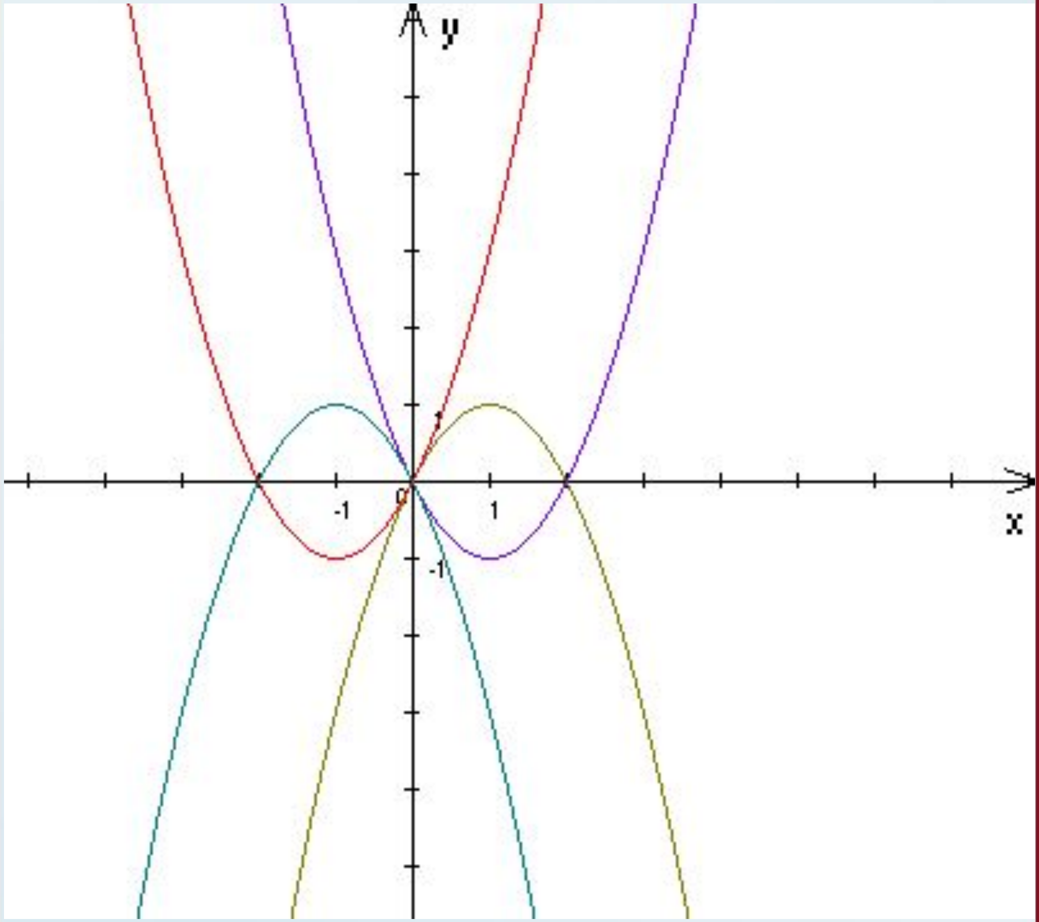
$y = x^2 + 2x;$

$y = x^2 - 2x;$

$y = -x^2 + 2x;$

$y = -x^2 - 2x$

найдите на чертеже его график.



Решение .

Упражнение 2

При $b > 0$ – вершина расположена левее оси Oy,
при $b < 0$ — правее,
при $b = 0$ — на оси Oy

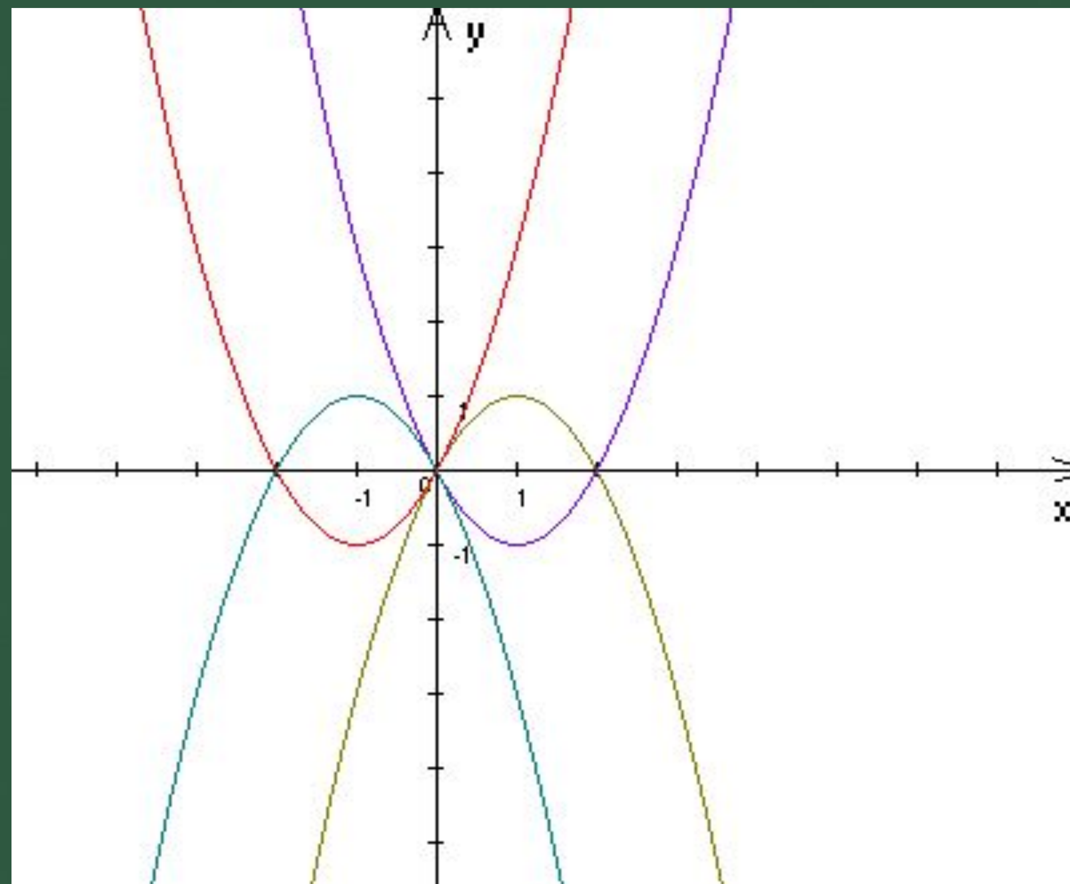
при $a > 0$

$y = x^2 + 2x;$

$y = x^2 - 2x;$

$y = -x^2 + 2x$

$y = -x^2 - 2x;$



при *a <0; b< 0 график располагается левее оси ОУ,*

при *a <0; b> 0 график располагается правее оси ОУ,* *А теперь, когда мы вспомнили как влияют коэффициенты на построение графика параболы выполним следующие упражнения:*

Упражнение №3

На чертеже изображены графики функций

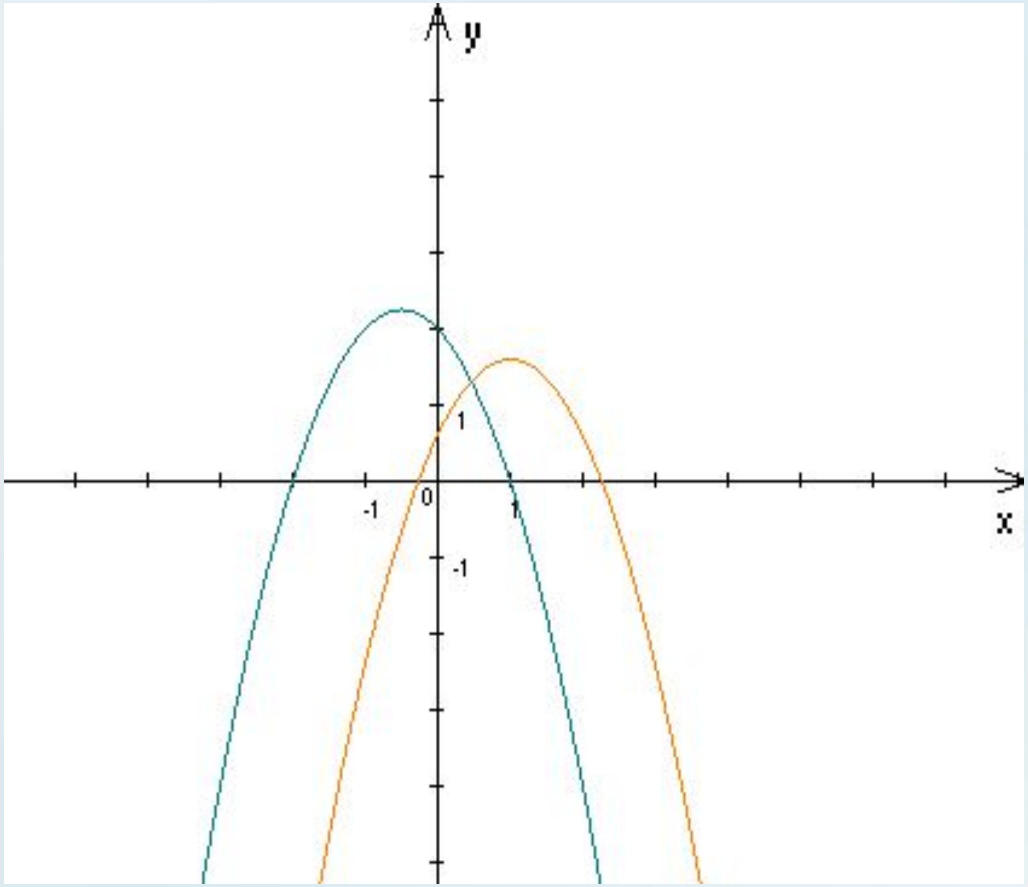
$$y = ax^2 + bx + 1$$

$$y = -x^2 - x + c$$

а) Где какой график?

б) Что больше: с или 1?

в) Определите знак b.



Решение .
Упражнение 3

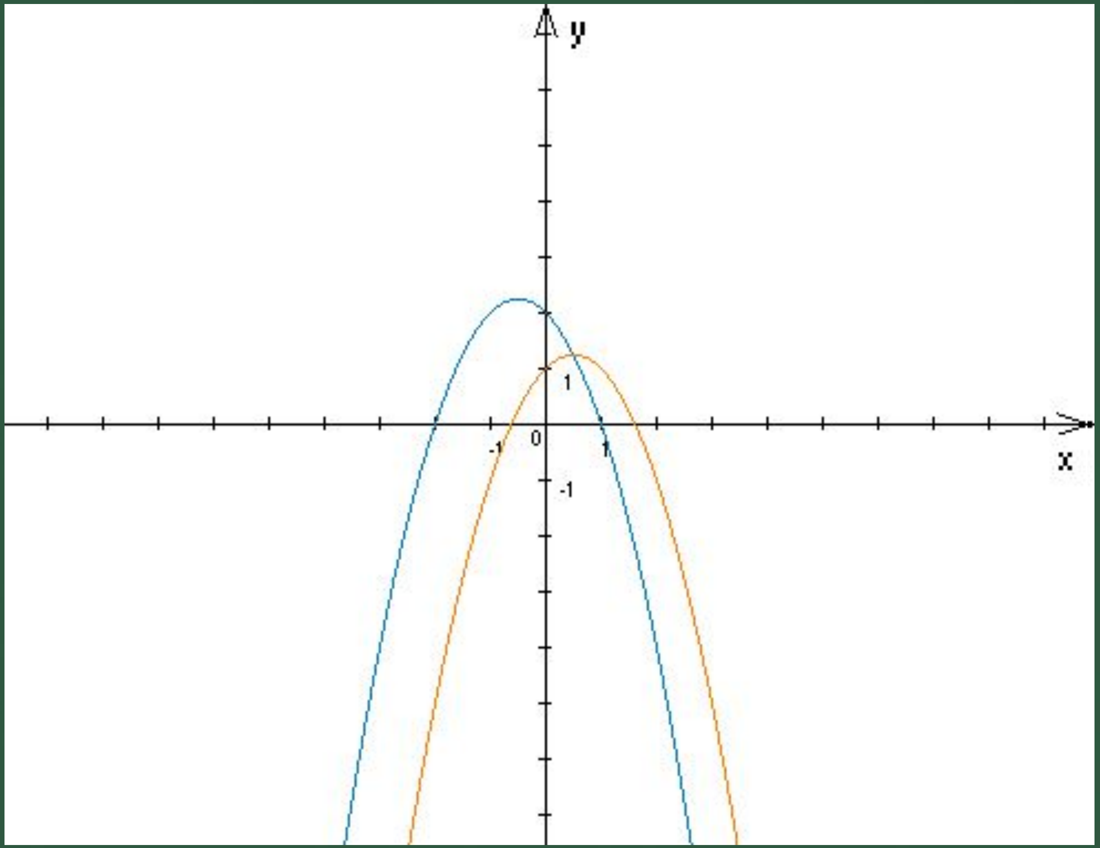
а) *Где какой график?*
б) *Что больше: с или 1?*
в) *Определите знак b.*

а) $y = -x^2 - x + c;$

$y = ax^2 + bx + 1$

б) c > 1

в) b > 0 ($a < 0$)



Упражнение №4

На чертеже изображены графики функций

$y = ax^2 + c,$

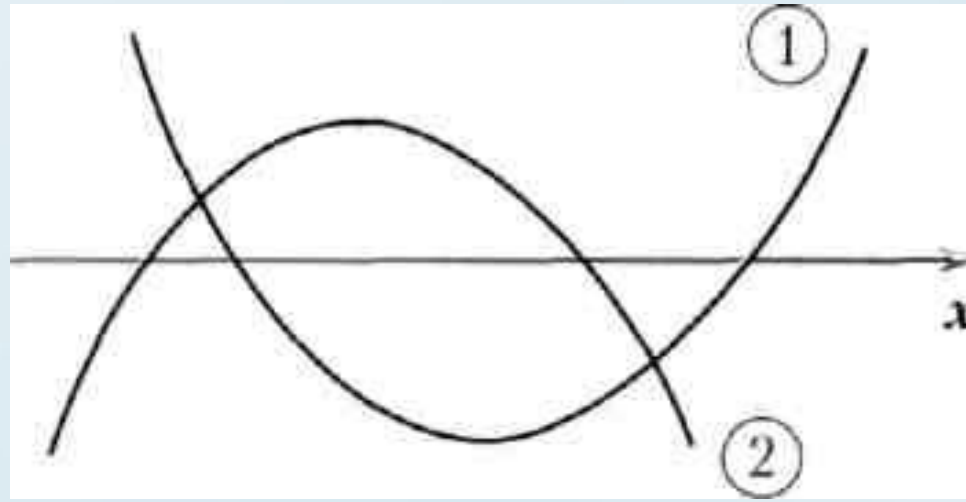
$y = x^2 + bx + d$

причем ось <u>оу</u>, идущая, как всегда, «снизу вверх» перпендикулярно оси <u>ох,</u> стерта.

а) Какая функция имеет график 1, а какая -2?

б) Определите знаки с и d .

в) Определите знак b.



Решение .

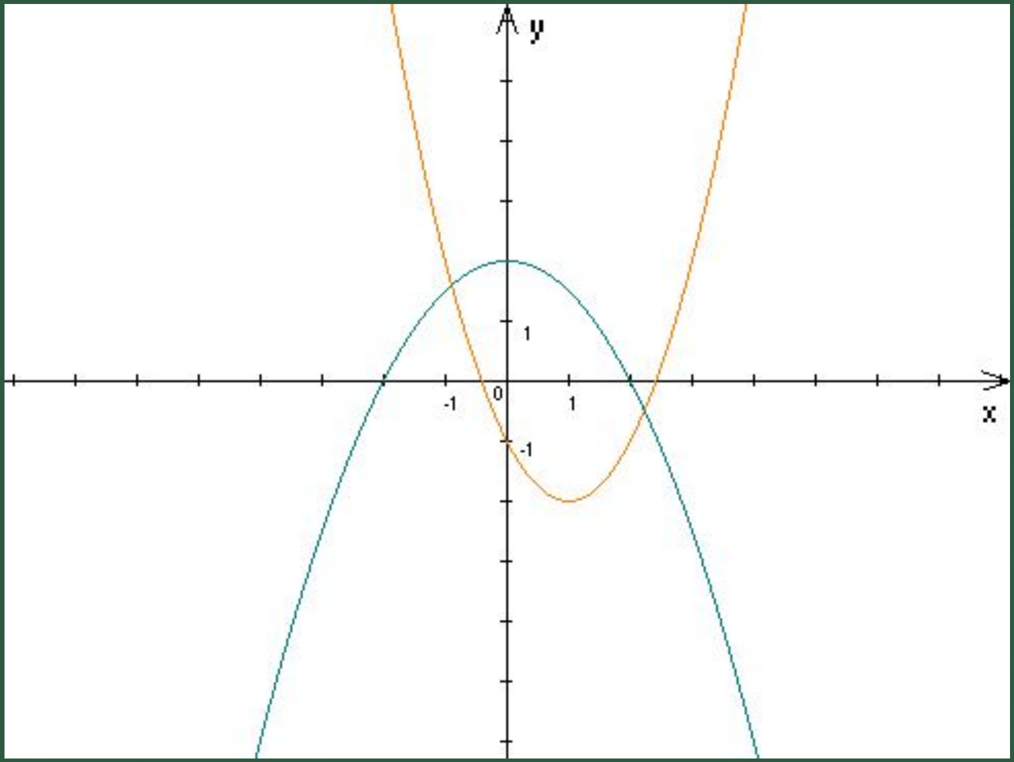
Упражнение 4

На чертеже изображены графики функций

$y = ax^2 + c$; $y = ax^2 + bx + d$;

а) $y = ax^2 + c$;

$y = ax^2 + bx + d$;



б) c >0; d< 0.

в) b<0

Упражнение №5

На чертеже изображены графики функций

$y = x^2 + 4x + c$,

$y = x^2 + bx + d$ и $y = x^2 + 1$,

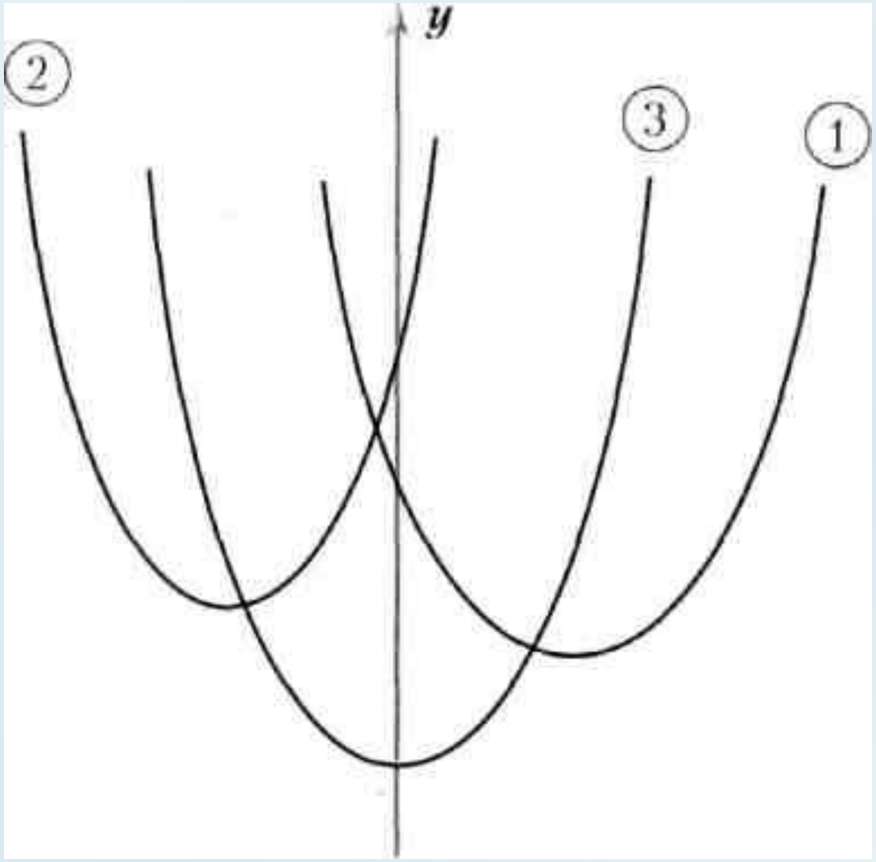
причем ось Ох, идущая, как всегда, «слева направо» перпендикулярно оси Оу, стерта.

а)Какая функция имеет график 1, какая — 2, а какая — 3?

б)Определите знак Ь.

в)Что больше: с или d?

г)Определите знаки с и d.



а)Какая функция имеет график 1,
какая — 2, а какая — 3?
б)Определите знак b.
в)Что больше: c или d?
г)Определите знаки c и d.

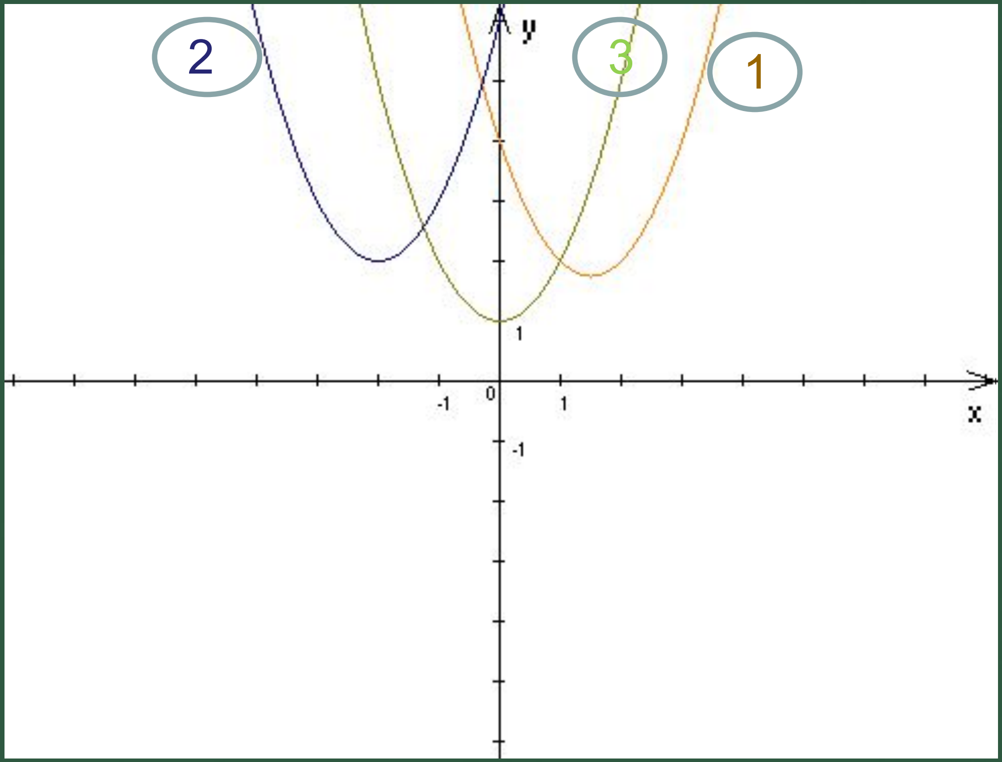
Решение .

Упражнение 5

а) $y = ax^2 + 4x + c$; – 2

$y = x^2 + bx + d$; – 1

$y = x^2 + 1$ – 3



б) b<0

в) c >d

г) c и d больше нуля

Упражнение №6.

На чертеже изображены графики функций $y = ax^2 + x + c$ и

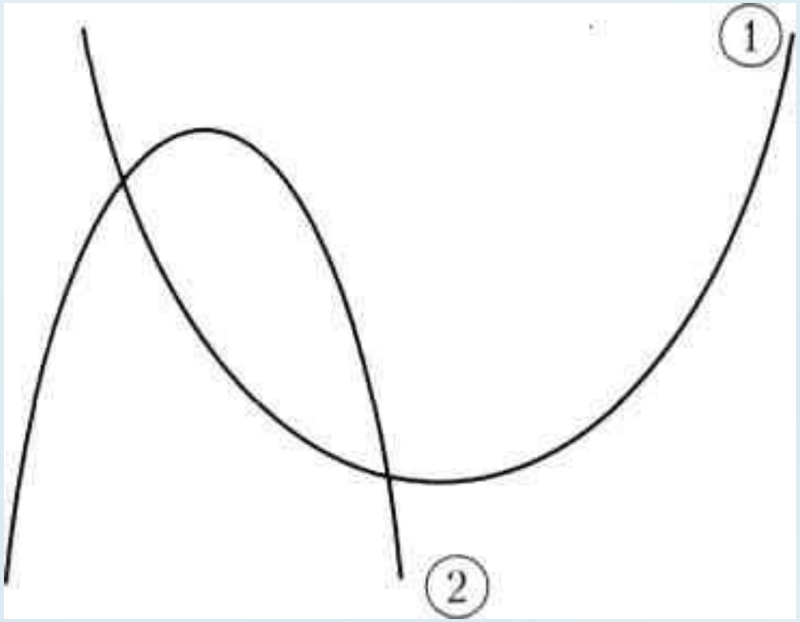
$y = -x^2 + bx + 2$,

причем оси Oy и Ox, расположенные стандартным образом (параллельно краям листа, Ox — горизонтально «слева направо», Oy — вертикально («снизу вверх»), стерты.

а) Определите знак b.

б) Определите знак c.

в) Докажите, что $c > \frac{1}{4a} + \frac{b^2}{4} + 2$



Решение .

Упражнение 6

а) Определите знак b

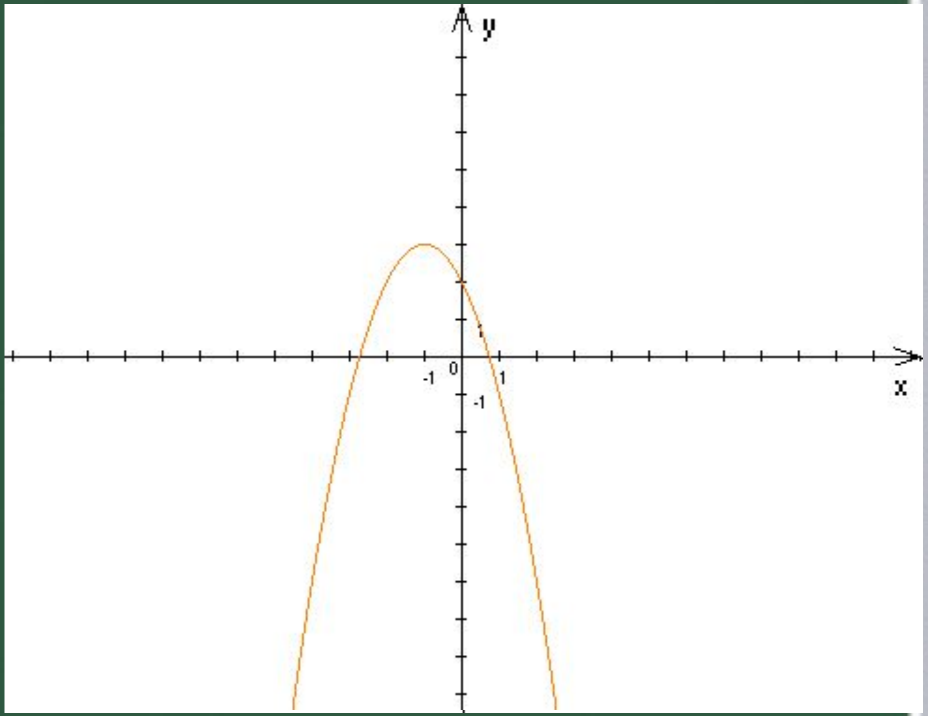
б) Определите знак с.

$y = ax^2 + x + c$

$y = -x^2 + b x + 2$

в) Докажите, что $c < \frac{1}{4a} + \frac{b^2}{4} + 2$

1) Ветви параболы $y = ax^2 + x + c$ направлены вверх, значит $a>0$, *знак абсциссы вершины параболы минус. Тогда, у параболы* $y = -x^2 + b x + 2$ *абсцисса тем более отрицательна. Значит* $b<0$.



2) *Ось оу проходит правее вершины параболы* $y = ax^2 + x + c$ *значит* $c<0$.

3) *Абсцисса вершины параболы* $y = -x^2 + b x + 2$ *равна* $\frac{b}{2}$,

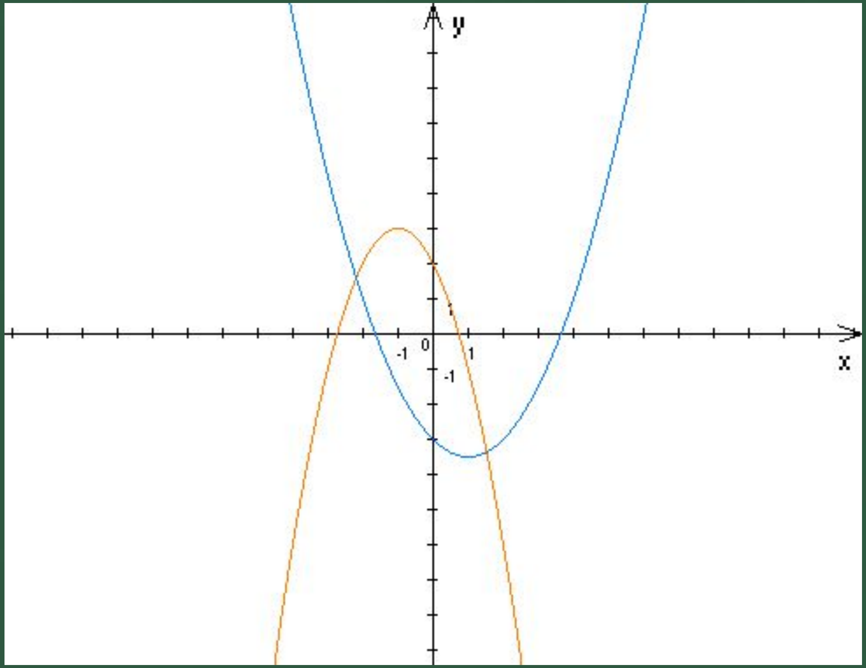
а ордината равна $2+\frac{b^2}{4}$.

Ордината вершины параболы $y = ax^2 + x + c$

равна $c-\frac{1}{4a}$. Сравним их: $\frac{b^2}{4}+2 > -\frac{1}{4a}+c;$

$\frac{b^2}{4}+2+\frac{1}{4a} > c;$

т.е $c < \frac{1}{4a}+\frac{b^2}{4}+2$



ч.т. д.

Решение упражнений основывается на тех фактах, которые мы знаем о коэффициентах квадратного трехчлена.

Свойства параболы чрезвычайно богаты и разнообразны, используя их решите следующую задачу.

Задача.

Известно, что парабола, являющаяся графиком квадратного трехчлена $y = ax^2 + 10x + c$, не имеет точек в третьей четверти. Какое из следующих утверждений может быть неверным?

(A) $a>0$

(B) Вершина параболы лежит во второй четверти.

(C) $c \geq 0$

(D) $c > 0{,}1$

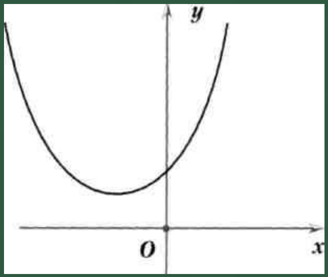
(E) $1OO - 4ac \leq 0$.

Решение.

Поскольку парабола не имеет точек в III четверти, то a не может быть отрицательным. Итак, $a > 0$, следовательно, абсцисса вершины $x_0 = -\frac{10}{a} < 0$. То есть вершина не может лежать ни в I, ни в IV четвертях.

В III четверти ее нет по условию, значит, она лежит во II четверти.

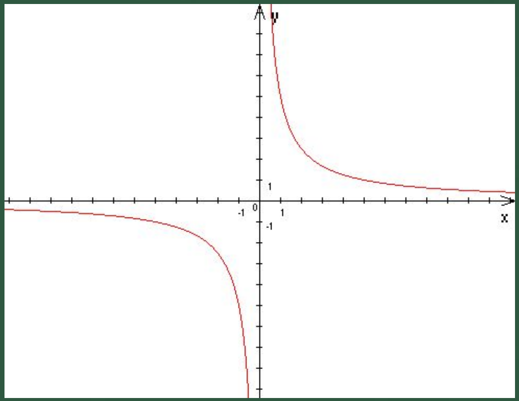
Итак, парабола обязана иметь такой вид, как показано на рисунке,

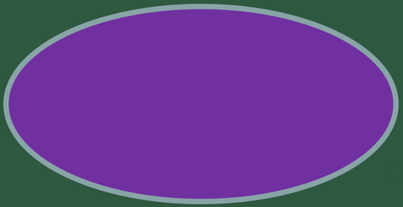


поэтому условия A, B и C обязательно выполняются. Неравенство в E означает, что дискриминант неположителен, то есть у квадратного трехчлена не более одного корня, — это условие тоже обязательно выполняется. Условие $c > 0{,}1$ ни из чего не следует. Действительно, оно может быть нарушено, например, для параболы $y = x^2 + 10x + 0{,}01$, удовлетворяющей условиям задачи.

Ответ: (D).

Самые   близкие родственники параболы – это окружность, гипербола и эллипс.





У этого термина существуют и другие значения.

(литература)

Пара́бола *«сравнение, сопоставление, подобие, приближение»:* *Небольшой рассказ иносказательного характера, имеющий поучительный смысл и особую форму повествования, которое движется как бы по кривой (параболе): начатый с отвлечённых предметов, рассказ постепенно приближается к главной теме, а затем вновь возвращается .*

РАССМАТРИВАЯ ПАРАБОЛУ.

(по материалам «Математического клуба “Кенгуру”»)