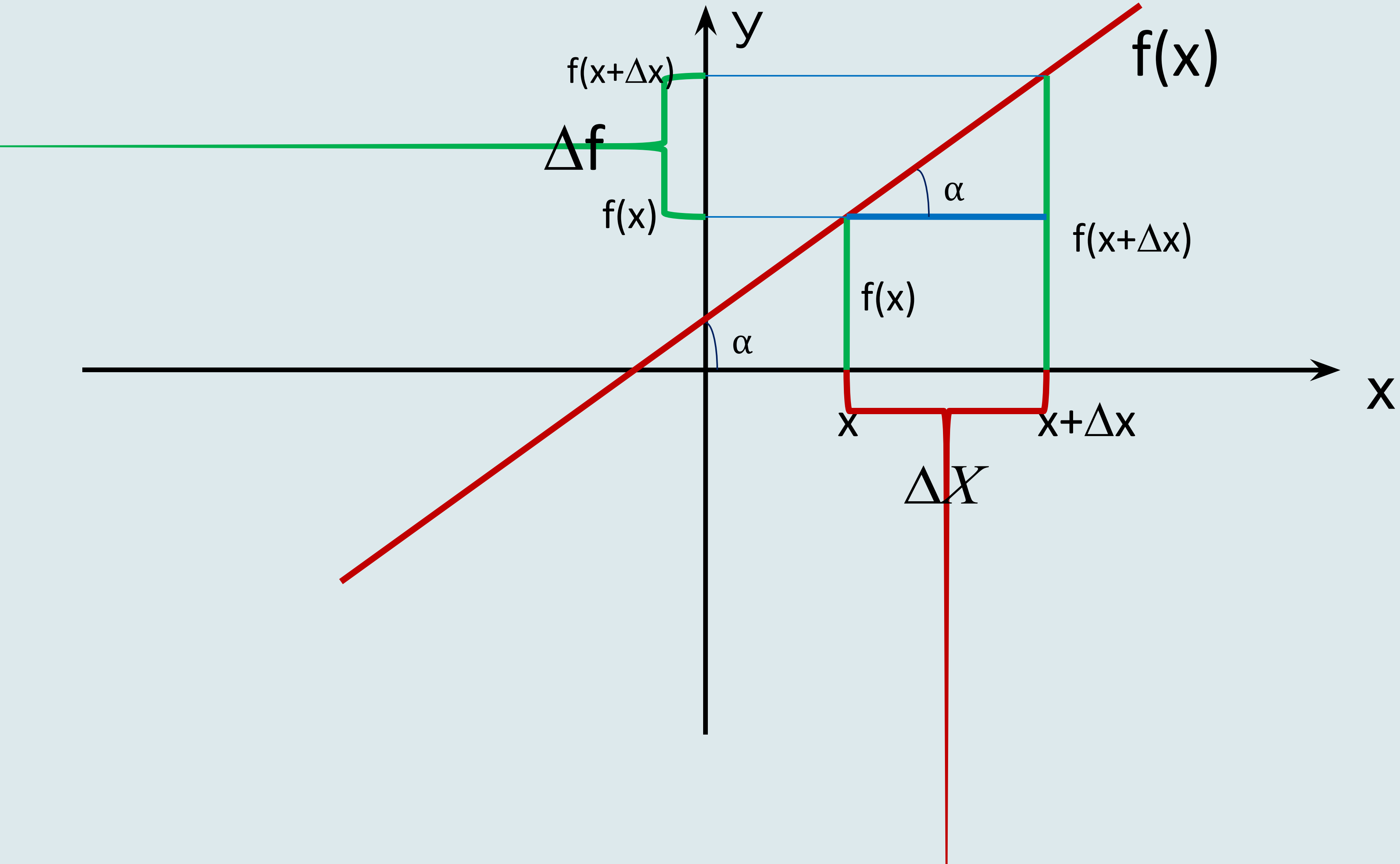
ПРОИЗВОДНАЯ

Структура изучения темы

- Приращение аргумента, приращение функции
- Определение производной
- Нахождение производной по определению
- Формулы дифференцирования
- Уравнение касательной
- Геометрический смысл производной
- Механический смысл производной

Приращение функции Δf и приращение аргумента ΔX



Определение производной

Производной функции в данной точке называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Происхождение терминов

Термин «производная» - буквально перевод французского слова derivee.
1797г – Ж.Лагранж ввел современные обозначения

$$y', f'(x)$$

И.Ньютон называл производную флюксией, а саму функцию – флюентой.
Г.Лейбниц говорил о дифференциальном отношении и обозначал производную как

$$\frac{df}{dx}$$

Термин «предел» (lim – сокращение латинского слова limes (межа, граница)) ввел И.Ньютон.

Алгоритм отыскания производной

- Дана функция $y = f(x)$
- Зафиксировать значение x, найти f(x).
- Дать аргументу x приращение Δx ,

перейти в новую точку $(x + \Delta x)$, найти $f(x + \Delta x)$

- Найти приращение функции: $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$
- Составить отношение приращения функции к приращению аргумента

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Предел такого отношения вычисляется при условии , что приращение аргумента стремится $\Delta x \to 0$ к нулю и является производной функции

$$f'(x) = \lim \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Пример нахождения производной по определению

$$f(x) = x^2$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x$$

$$f'(x) = 2x$$

Формулы дифференцирования

Функция	производная	Функция	производная
C	0	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
X	1	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
X^n	nX^{n-1}	$tg\alpha$	$\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$
$\sqrt{X}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$ctg\alpha$	$-\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$
$u+v$	$u'+v'$	$g(f(\chi))$	$g'(f(\chi))*f'(\chi)$
$u*v$	$u'v+uv'$		
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$		

Поставьте соответствие

Функция	производная
C	$3X^2$
X	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
X^2	$n\mathrm{X}^{n-1}$
X^3	1
X^n	$-\frac{1}{\mathrm{X}^2}$
$\sqrt{X}$	0
$\frac{1}{\mathrm{X}}$	$2X$

Функция	производная
$u+v$	$u'v+uv'$
$u\cdot v$	$g'(f(\chi))*f'(\chi)$
$\frac{u}{v}$	$u'+v'$
$g(f(\chi))$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$

Найти производную функции

Самостоятельная работа

- $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 7$
- $f(x) = 7x^5 - 9x^3 + 3x - 3{,}5$

- $f(x) = (x^3 - 2x)(x^2 + 3)$

- $f(x) = \dfrac{x^2 - 5}{2x + 4}$

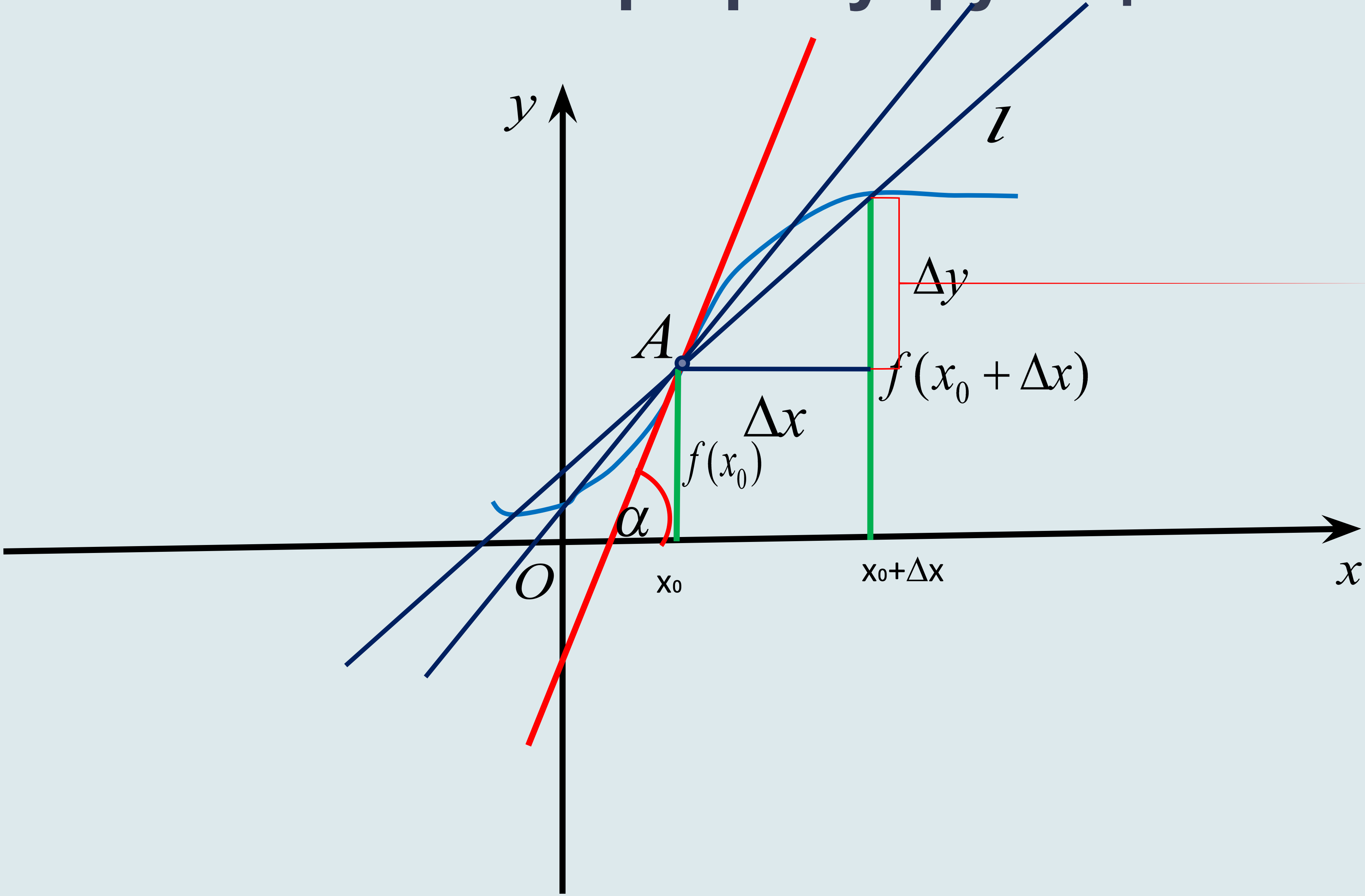
Ответы

- $f'(x) = 4x^3 – 12x^2 + 12x$
- $f'(x) = 35x^4 - 27x^2 + 3$
- $f'(x) = 5x^4 + 3x^2 - 6$
- $f'(x) = \dfrac{2x^2 + 8x + 10}{(2x+4)^2}$

Критерии оценок

- «5» - без ошибок;
- «4» - 3 задания решены верно;
- «3» - 2 задания решены верно;

Касательная к графику функции



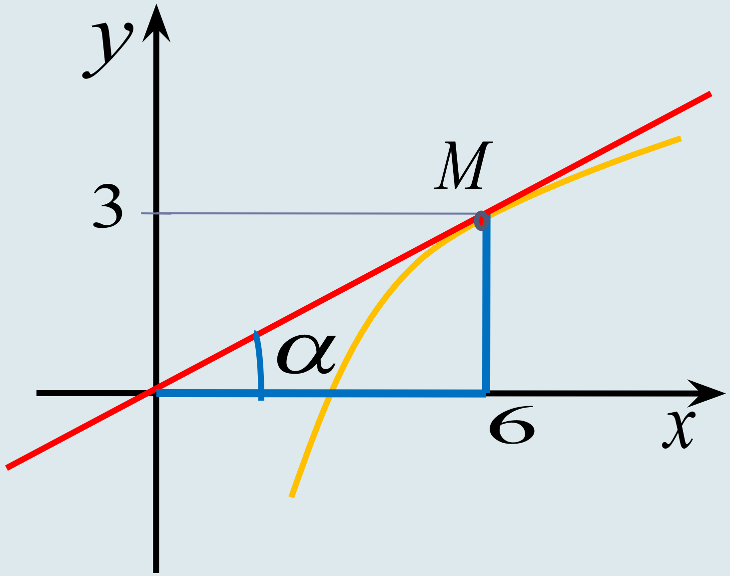
Геометрический смысл производной

Геометрический смысл производной состоит в том, что значение производной функции *y=f(x)* в точке x_0 равно угловому коэффициенту касательной к графику функции в точке с абсциссой x_0 :

$$f'(x_0) = k = tg\alpha$$

Решить задачу

- Прямая, проходящая через начало координат, касается графика функции y = f(x) в точке M(6;3). Найдите f´(6).



$$tg\alpha = \frac{y}{x} = \frac{3}{6} = 0,5$$

$tg\ \alpha > 0$ $tg\ \alpha < 0$

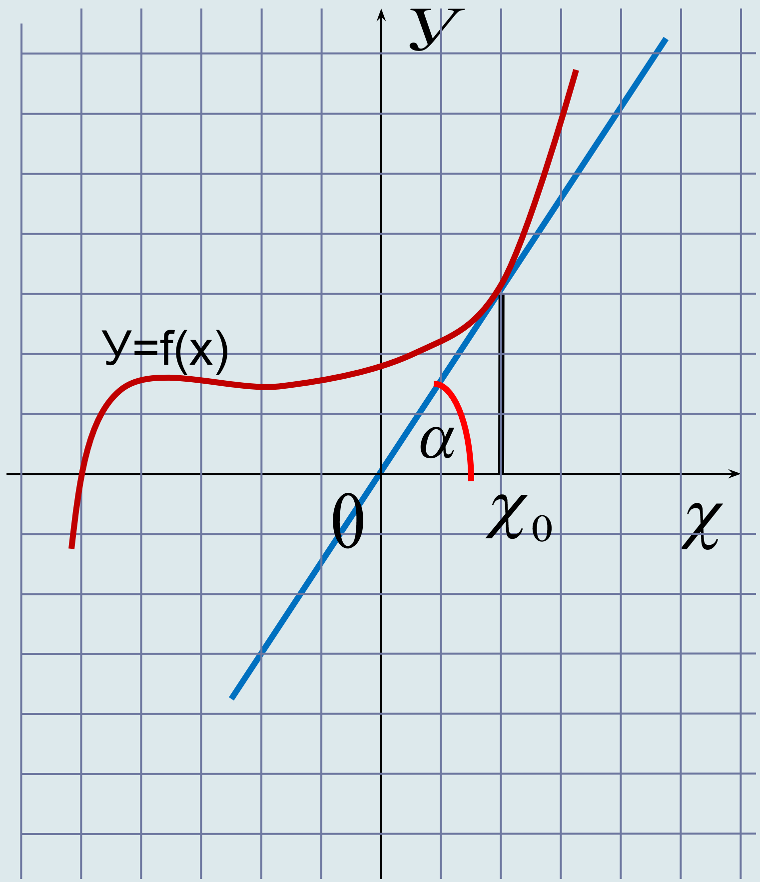


Рис а

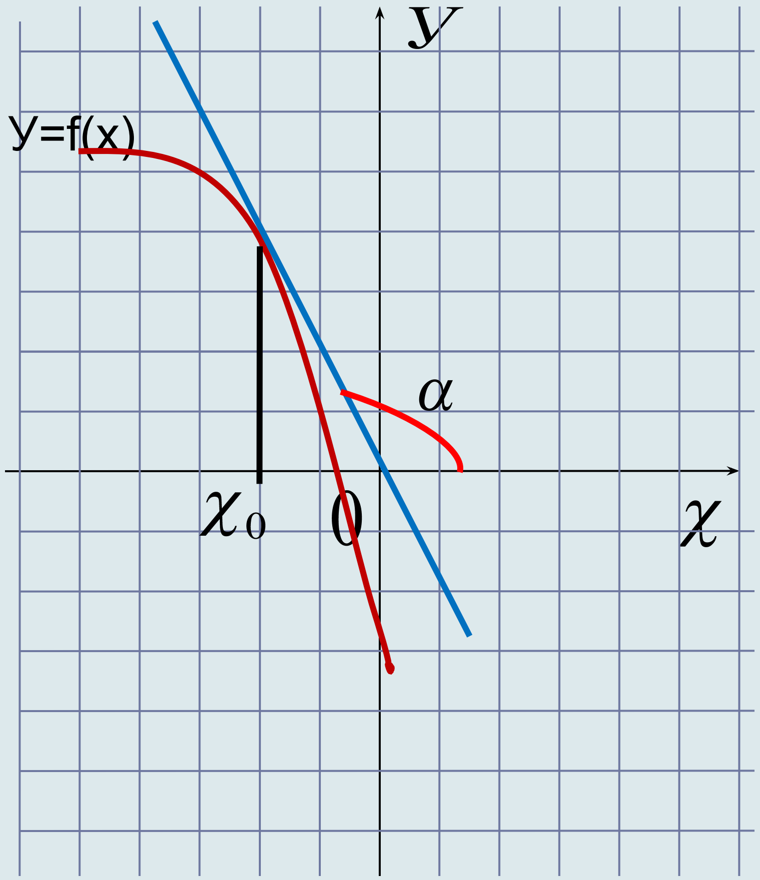


Рис б

На рисунке изображен график функции y = f(x) и касательная к нему в точке с абсциссой x_0.

Уравнение касательной

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$y = kx + b$$

$$f'(x_0) = k = tg\alpha$$

Найти уравнение касательной к графику функции

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 1 \quad x_0 = 2$$

$$f(x_0) = f(2) = 2^3 - 2 * 2^2 + 1 = 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x$$

$$f'(x_0) = f(2) = 3 * 2^2 - 4 * 2 = 4$$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$y = 1 + 4(x - 2)$$

$$y = 4x - 7$$

Механический смысл производной

$$y = f(x)$$

$f'(x)$ *скорость*

$f''(x)$ *ускорение*

Задача

Точка движется прямолинейно по закону S(t) = 2 t ³ - 3 t

Вычислите скорость движения точки:

а) в момент времени *t;*

б) в момент времени *t=2c.*

Решение.

а) $v(t) = s'(t) = (2t^3 - 3t)' = 2 * 3t^2 - 3 * 1 = 6t^2 - 3$

б) $v(2) = 6 * 2^2 - 3 = 21(м / с)$

Задача №268

- Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=t^3-4t^2$
- Найдите скорость и ускорение в момент времени $t=5$с.

(Перемещение измеряется в метрах)

$$v(t)=(x(t))'=3t^2-4*2t=3t^2-8t$$

$$v(5)=3*5^2-8*5=75-40=35(м/с)$$

$$a(t)=(v(t))'=(3t^2-8t)'=6t-8$$

$$a(5)=6*5-8=22(м/с^2)$$

Литература

- Мордкович А.Г. Алгебра и начала анализа. 10-11 класс.: В двух частях. Ч. 1:Учеб. для общеобразоват. учреждений.-6-е изд. – М: Мнемозина,2005.

- Алгебра и начала анализа: Учеб. Для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений/ А.Н.Колмогоров, А.М.Абрамов, Ю.П. Дудницын и др.; Под ред. А.Н. Колмогорова. - М.: Просвещение, 2004.