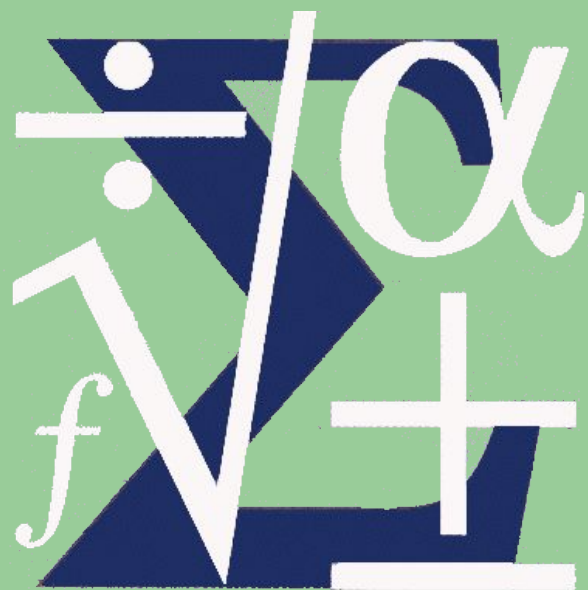
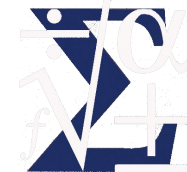


Построение графиков функций, уравнений и соответствий

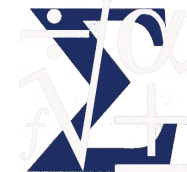


Элективный курс,
10 класс



Цель элективного курса

- прояснить и дополнить школьный материал, связанный с функциями и построением их графического изображения,
- представить систематизацию функций не по видам, а по методам построения их графиков.

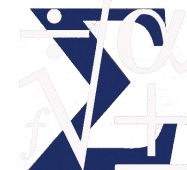


Задачи элективного курса

- знакомство учащихся с методами решения различных по формулировке нестандартных задач, связанных с построениями графиков соответствий;
- привитие навыков употребления функционально-графического метода при решении задач;
- расширение и углубление знаний по математике по программному материалу.

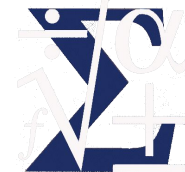
Тематическое планирование

№	Тема занятий	количество часов			Форма проведения	образовательный продукт
		всего	теория	практи		
1	<p>Понятия функции и графика:</p> <ul style="list-style-type: none"> <input type="checkbox"/> зависимость; <input type="checkbox"/> график функции; <input type="checkbox"/> способы задания функции 	2	1	1	лекция	опорный конспект
2	<p>Преобразование графиков:</p> <ul style="list-style-type: none"> <input type="checkbox"/> перенос вдоль оси ординат; <input type="checkbox"/> перенос вдоль оси абсцисс; <input type="checkbox"/> сжатие (растяжение) вдоль оси ординат; <input type="checkbox"/> сжатие (растяжение) вдоль оси абсцисс 	4	2	2	лекция, практикум, тренинг	опорный конспект, решенные задания
3	<p>Действия над функциями:</p> <ul style="list-style-type: none"> <input type="checkbox"/> сумма (разность) функций; <input type="checkbox"/> произведение функций; <input type="checkbox"/> частное двух функций; <input type="checkbox"/> функции, содержащие операцию взятия модуля 	3	1	2	лекция, мастер класс	таблицы, схемы, опорный конспект
4	<p>Дополнительный материал:</p> <ul style="list-style-type: none"> <input type="checkbox"/> функционально-графический подход к решению задач <input type="checkbox"/> построения графиков суперпозиций простейших функций 	4	2	2	лекция, практикум	решенные задания
5	Итоговая диагностика	1	-	1	защита работы, проекта	
	Итого	14	6	8		



Содержание

- Параллельный перенос вдоль оси Параллельный перенос вдоль оси OY
- Параллельный перенос вдоль оси Параллельный перенос вдоль оси OX
- Растяжение (сжатие) в k раз вдоль оси Растяжение (сжатие) в k раз вдоль оси OY
- Растяжение (сжатие) в k раз вдоль оси Растяжение (сжатие) в k раз вдоль оси OX
- Построение графика Построение графика $y = f(|x|)$
- Симметричное отображение относительно оси

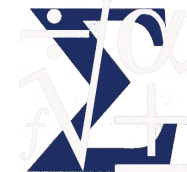


Параллельный перенос вдоль оси ординат

$$y = f(x) \longrightarrow y = f(x) + a$$

$$(x_0, y_0) \longrightarrow (x_0, y_0 + a)$$

Для построения графика функции $y = f(x) + a$ необходимо график функции $y = f(x)$ перенести вдоль оси ОУ на вектор $(0; a)$



Параллельный перенос вдоль оси абсцисс

$$y = f(x) \longrightarrow y = f(x - a)$$

$$(x_0, y_0) \longrightarrow (x_0 + a, y_0)$$

Для построения графика функции $y = f(x - a)$ необходимо график функции $y = f(x)$ перенести вдоль оси Ox на вектор $(a; 0)$

Построить график функций, сдвигом вдоль:

а) оси ординат;

б) оси абсцисс

$$y = |x|$$

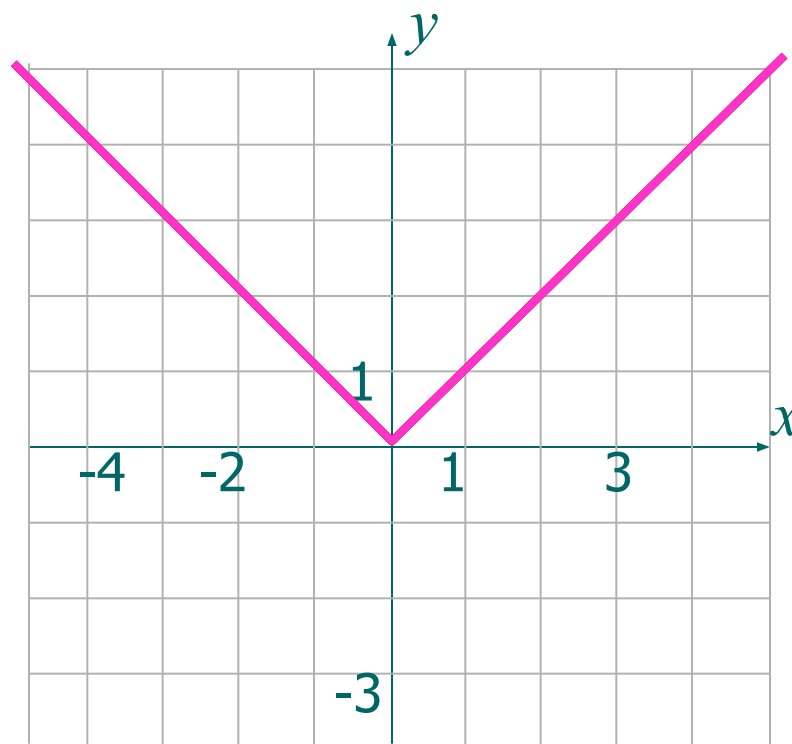
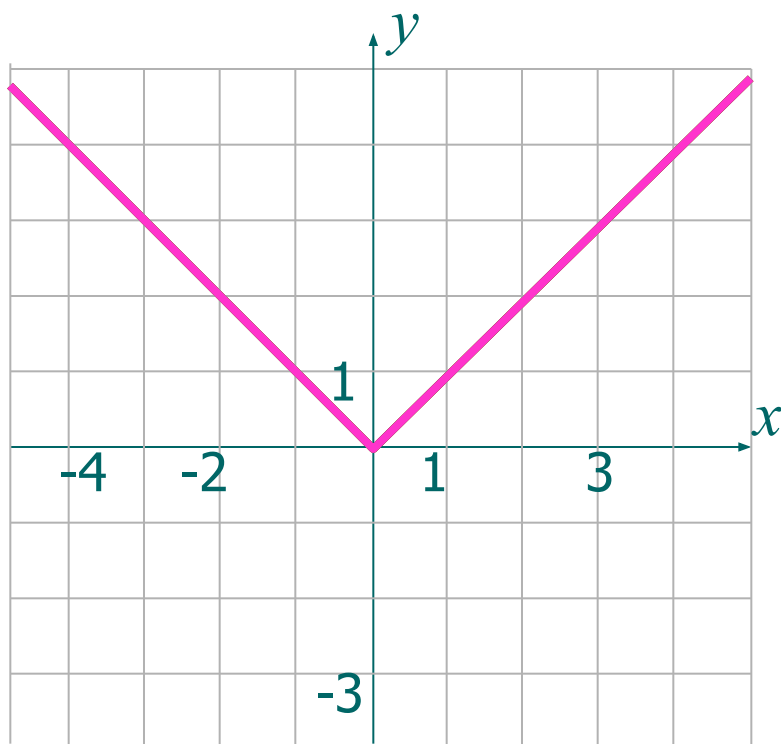
$$y = |x| + 2$$

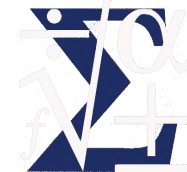
$$y = |x| - 3$$

$$y = |x|$$

$$y = |x + 2|$$

$$y = |x - 3|$$





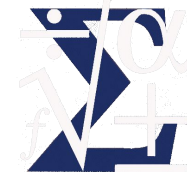
Растяжение (сжатие) в k раз вдоль оси ординат

$$y = f(x) \longrightarrow y = k f(x), \quad k > 0$$

$$(x_0, y_0) \longrightarrow (x_0, k y_0)$$

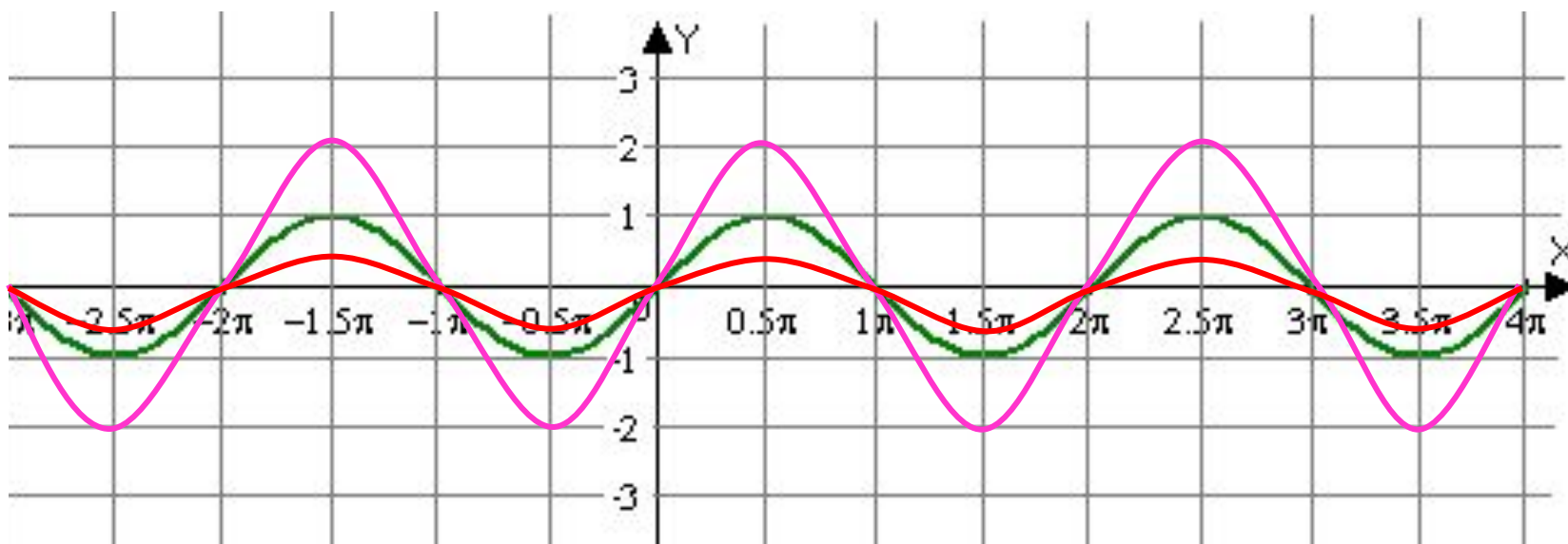
Для построения графика функции $y = k f(x)$ необходимо график функции $y = f(x)$ растянуть в k раз вдоль оси ОУ для $k > 1$ или сжать в $1/k$ раз вдоль оси ОУ для $k < 1$

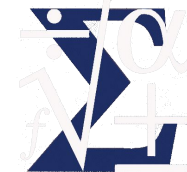




Построить графики функций, сжатием вдоль оси ординат

$$y = \sin x \quad y = 2 \sin x \quad y = \frac{1}{2} \sin x$$



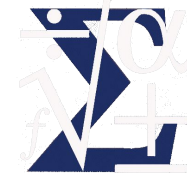


Растяжение (сжатие) в k раз вдоль оси абсцисс

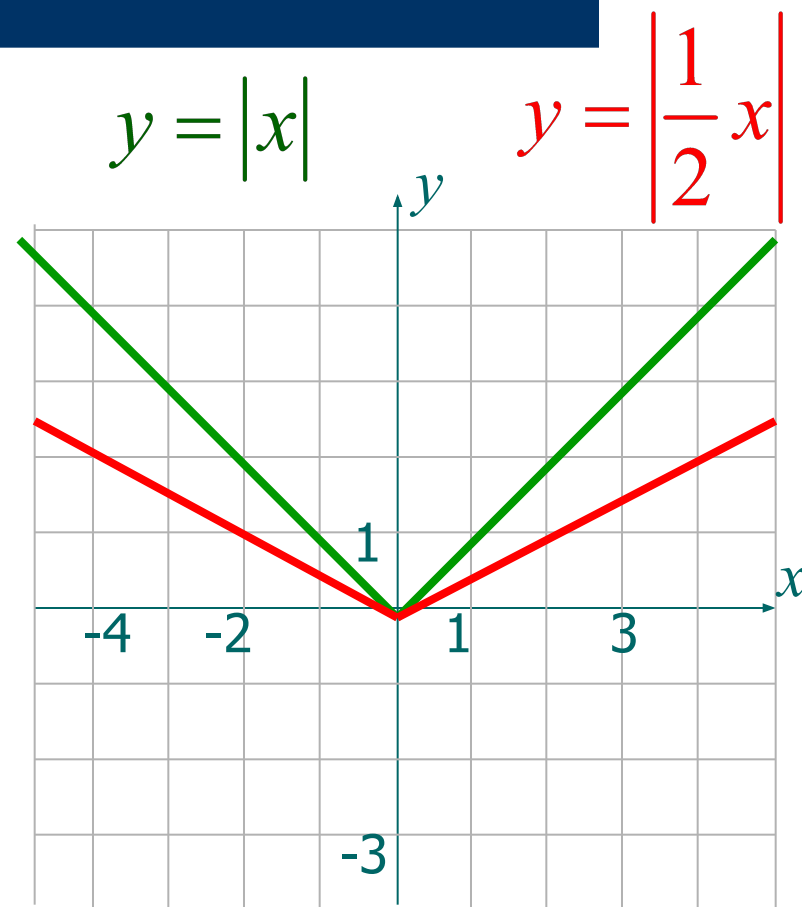
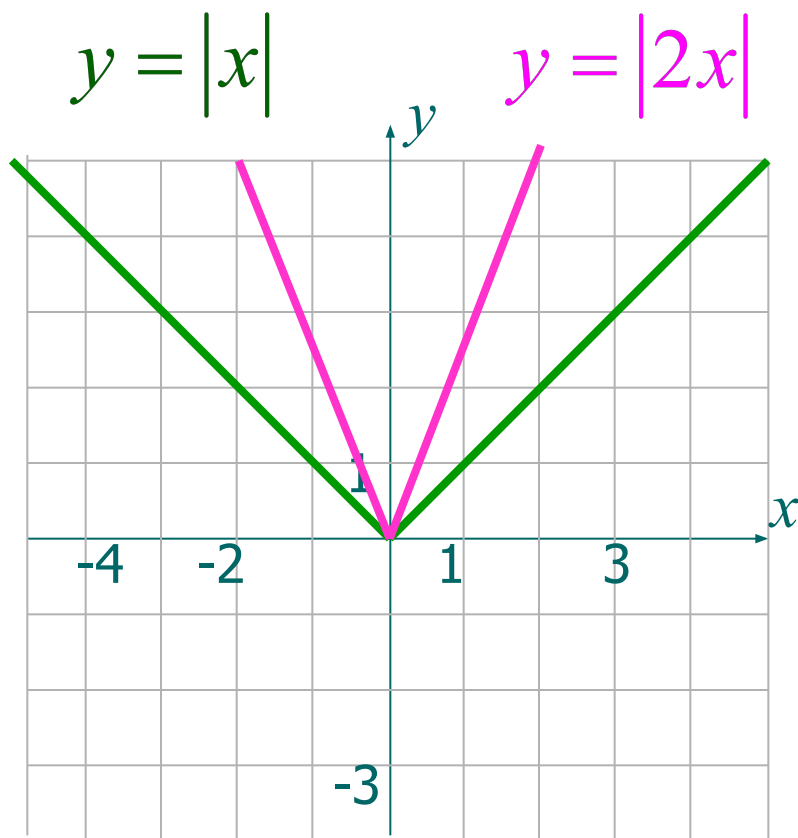
$$y = f(x) \longrightarrow y = f(kx), \quad k > 0$$
$$(x_0, y_0) \longrightarrow \left(\frac{x_0}{k}, y_0 \right)$$

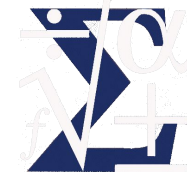
Для построения графика функции $y = f(kx)$ необходимо график функции $y = f(x)$ сжать в k раз вдоль оси Ox для $k > 1$ или растянуть в $1/k$ раз вдоль оси Ox для $k < 1$





Построить графики функций, сжатием вдоль оси абсцисс





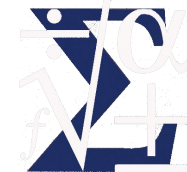
Симметричное отображение относительно оси абсцисс

$$y = f(x) \longrightarrow y = -f(x)$$

$$(x_0, y_0) \longrightarrow (x_0, -y_0)$$

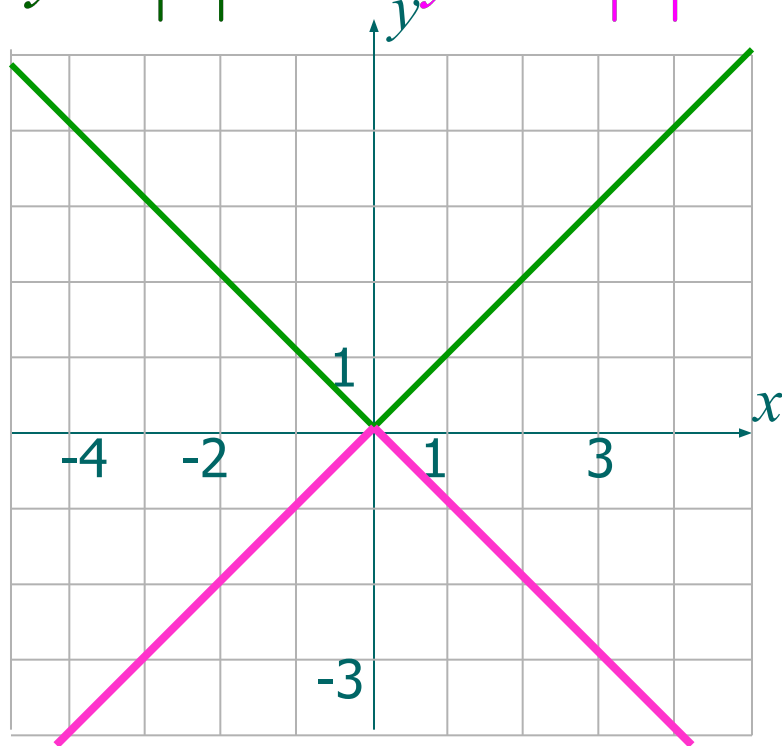


Для построения графика функции $y = -f(x)$ необходимо график функции $y = f(x)$ симметрично отобразить относительно оси Ox

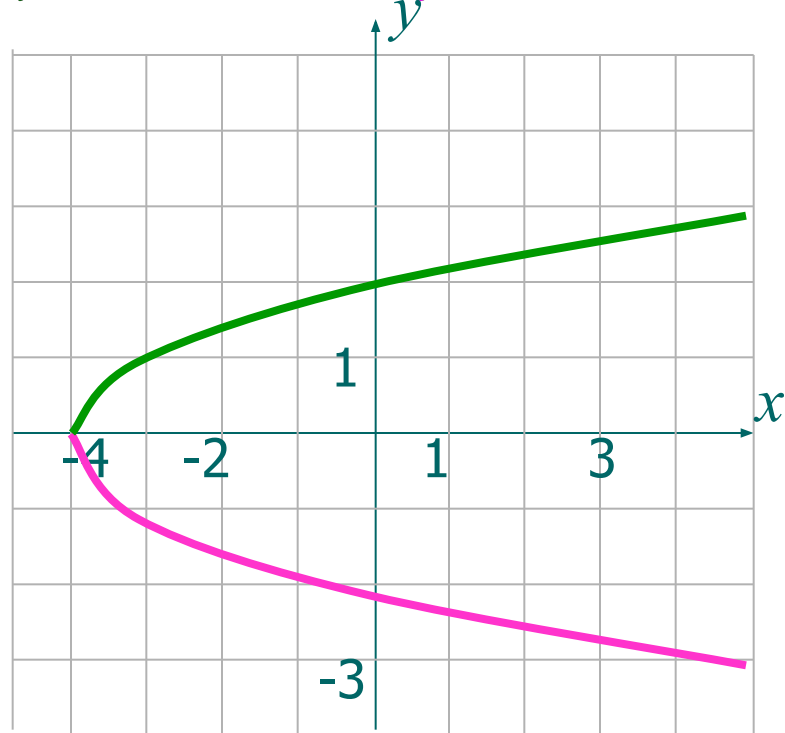


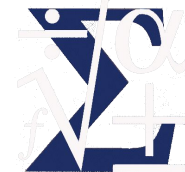
Построить графики функций, симметричных отображением вдоль оси абсцисс

$$y = |x|$$



$$y = \sqrt{x-4} \quad y = -\sqrt{x-4}$$





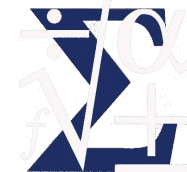
Симметричное отображение относительно оси ординат

$$y = f(x) \longrightarrow y = f(-x)$$

$$(x_0, y_0) \longrightarrow (-x_0, y_0)$$



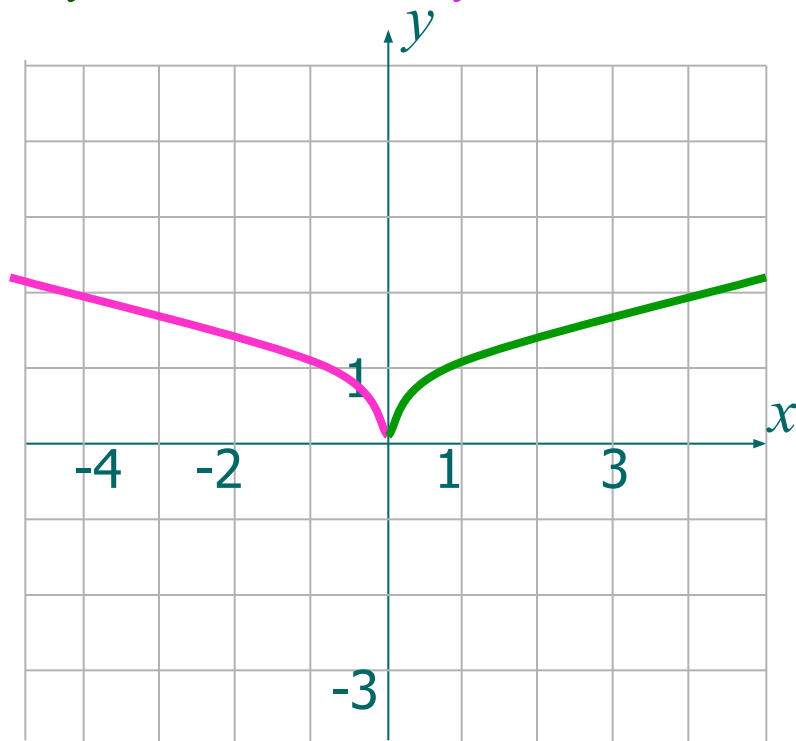
Для построения графика функции $y = f(-x)$ необходимо график функции $y = f(x)$ симметрично отобразить относительно оси OY



Построить графики функций, симметричным отображением вдоль оси ординат

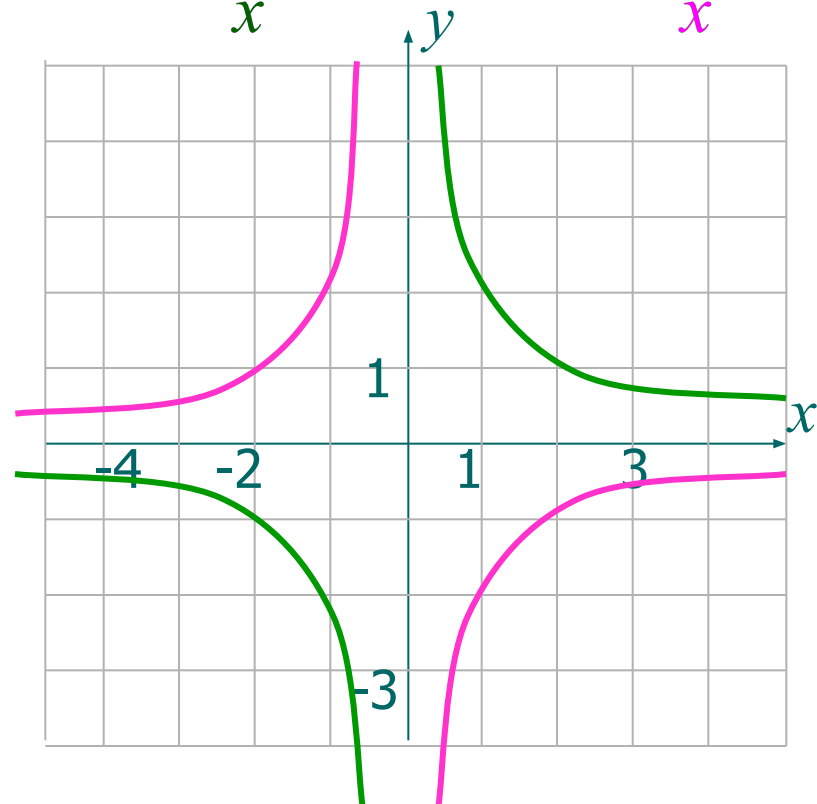
$$y = \sqrt{x}$$

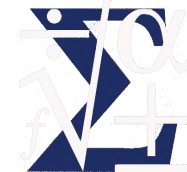
$$y = \sqrt{-x}$$



$$y = \frac{2}{x}$$

$$y = -\frac{2}{x}$$



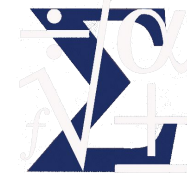


Построение графика $y = |f(x)|$

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \geq 0; \\ -f(x), & \text{если } f(x) < 0. \end{cases}$$

Для построения графика функции $y = |f(x)|$ необходимо часть графика функции $y = f(x)$ лежащую в области $y \geq 0$, оставить неизменной, а часть графика функции $y = f(x)$, лежащую в области $y < 0$, симметрично отобразить относительно оси Ox

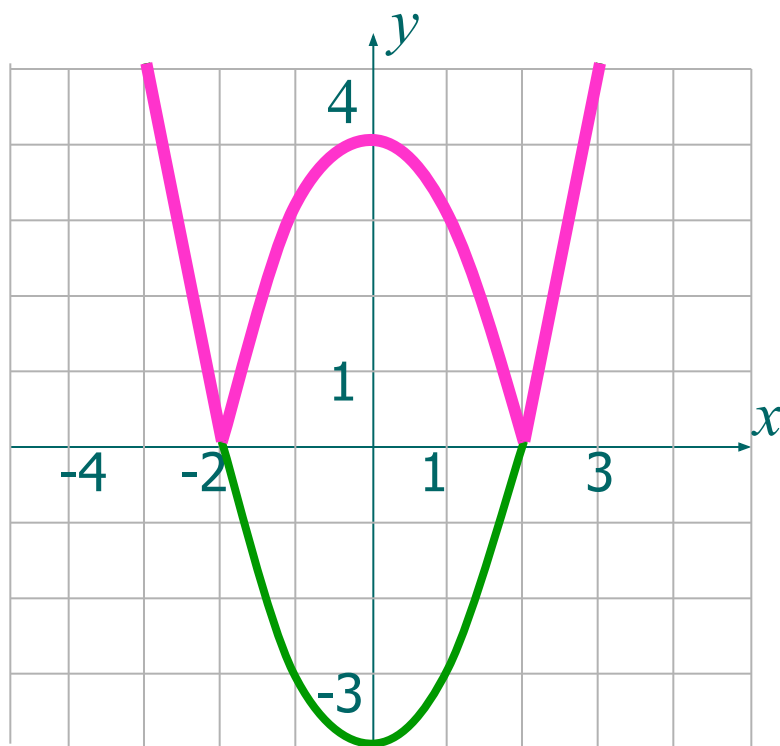




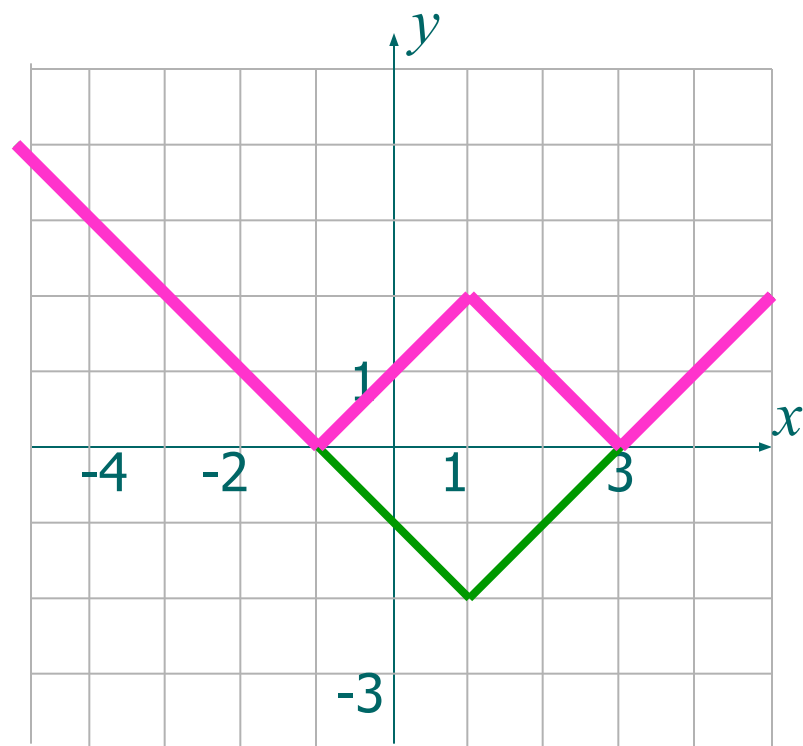
Построить графики функций

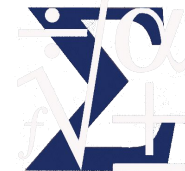
$$y = |f(x)|$$

$$y = x^2 - 4; \quad y = |x^2 - 4|$$



$$y = |x - 1| - 2; \quad y = ||x - 1| - 2|$$



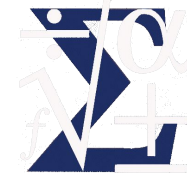


Построение графика $y = f(|x|)$

$$y = f(|x|) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \geq 0; \\ f(-x), & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Для построения графика функции $y = f(|x|)$ необходимо часть графика функции $y = f(x)$, лежащую в области $x \geq 0$ оставить неизменной, и её же отобразить симметрично относительно оси ОУ в область $x < 0$

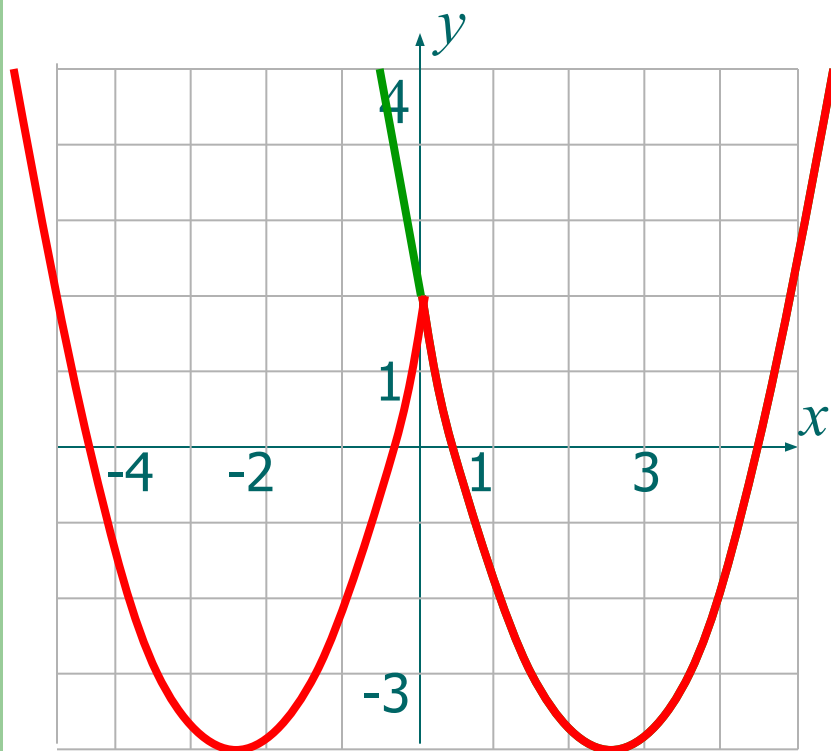




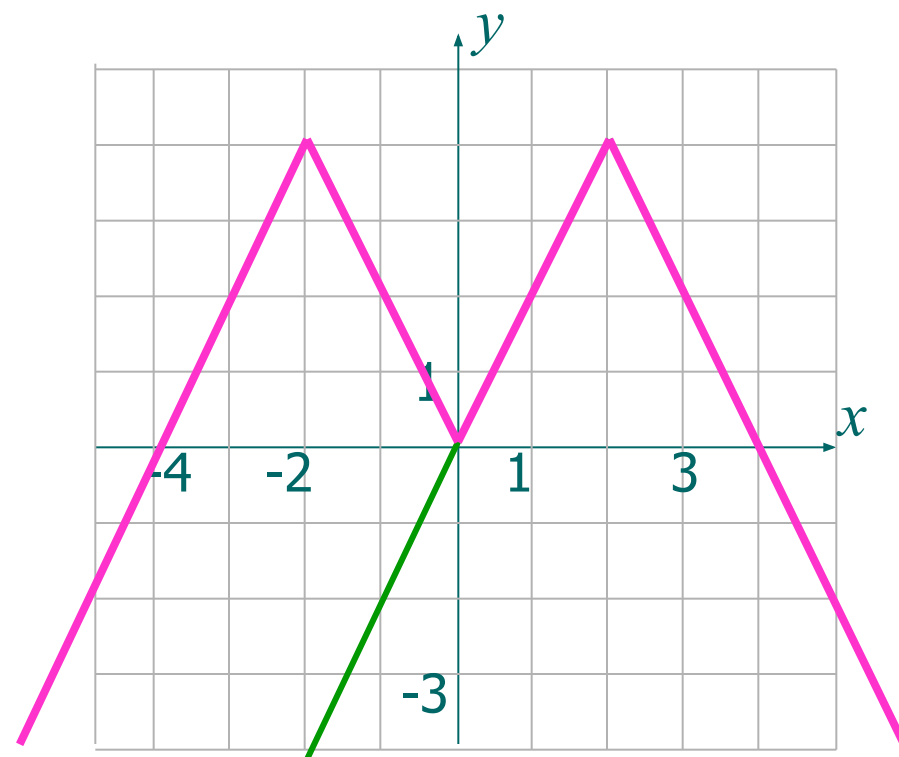
Построить графики функций

$$y = f(|x|)$$

$$y = (x - 2,5)^2 - 4; \quad y = (|x| - 2,5)^2 - 4;$$



$$y = 4 - 2|x - 2|; \quad y = 4 - 2||x| - 2|$$



МЕТОД

СЛОЖЕНИЯ ГРАФИКОВ

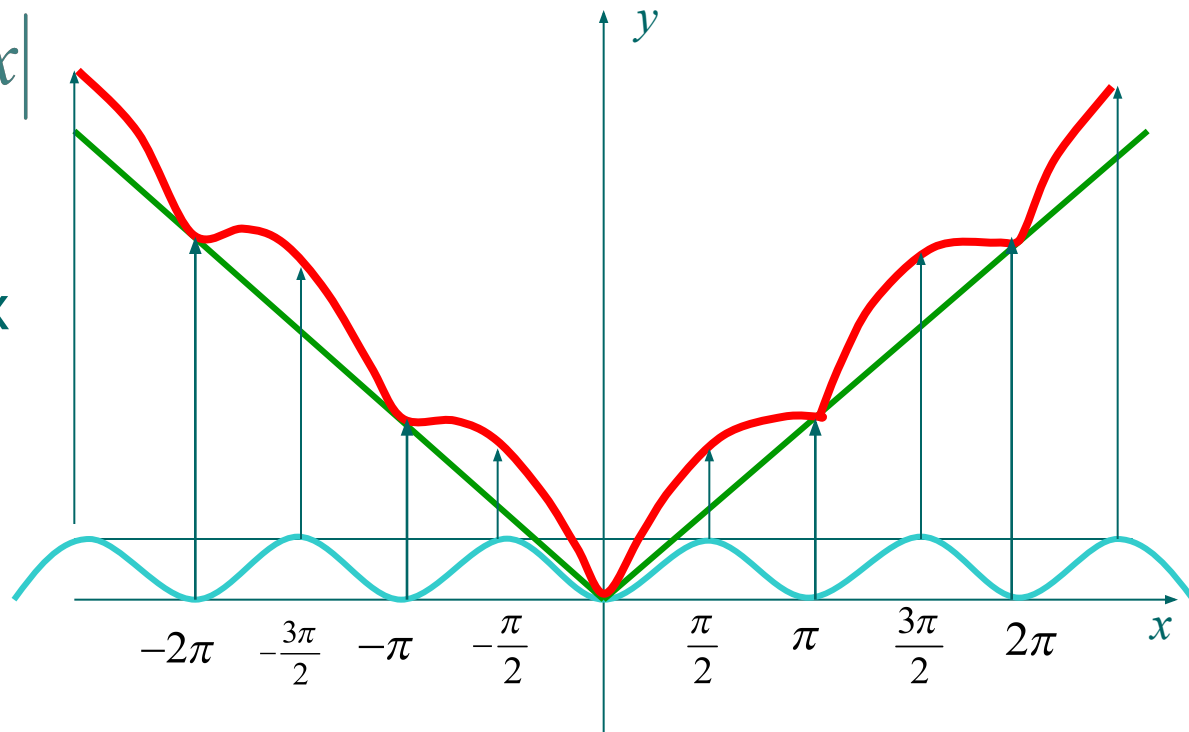
Постройте график функции $y = |x| + |\sin x|$

Решение.

Построим в одной системе координат графики функций

$$y = |x| \text{ и } y = |\sin x|$$

Путем сложения соответствующих координат получаем искомый график

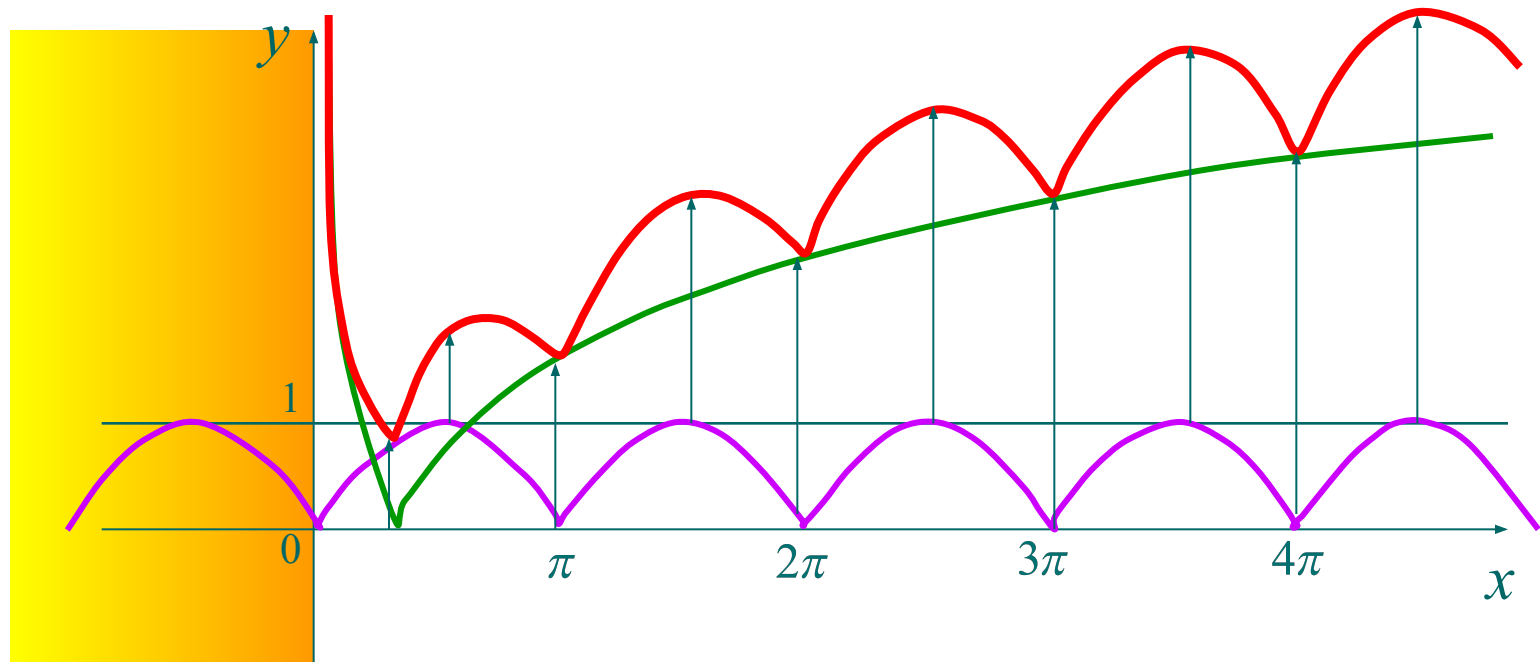


Построить график функции

$$y = |\sin x| + |\log_2 x|$$

Построим пунктиром в одной системе координат графики функции $y = |\sin x|$ и $y = |\log_2 x|$

Путем сложения соответствующих координат получаем искомый график



МЕТОД УМНОЖЕНИЯ ГРАФИКОВ

Постройте график

функции

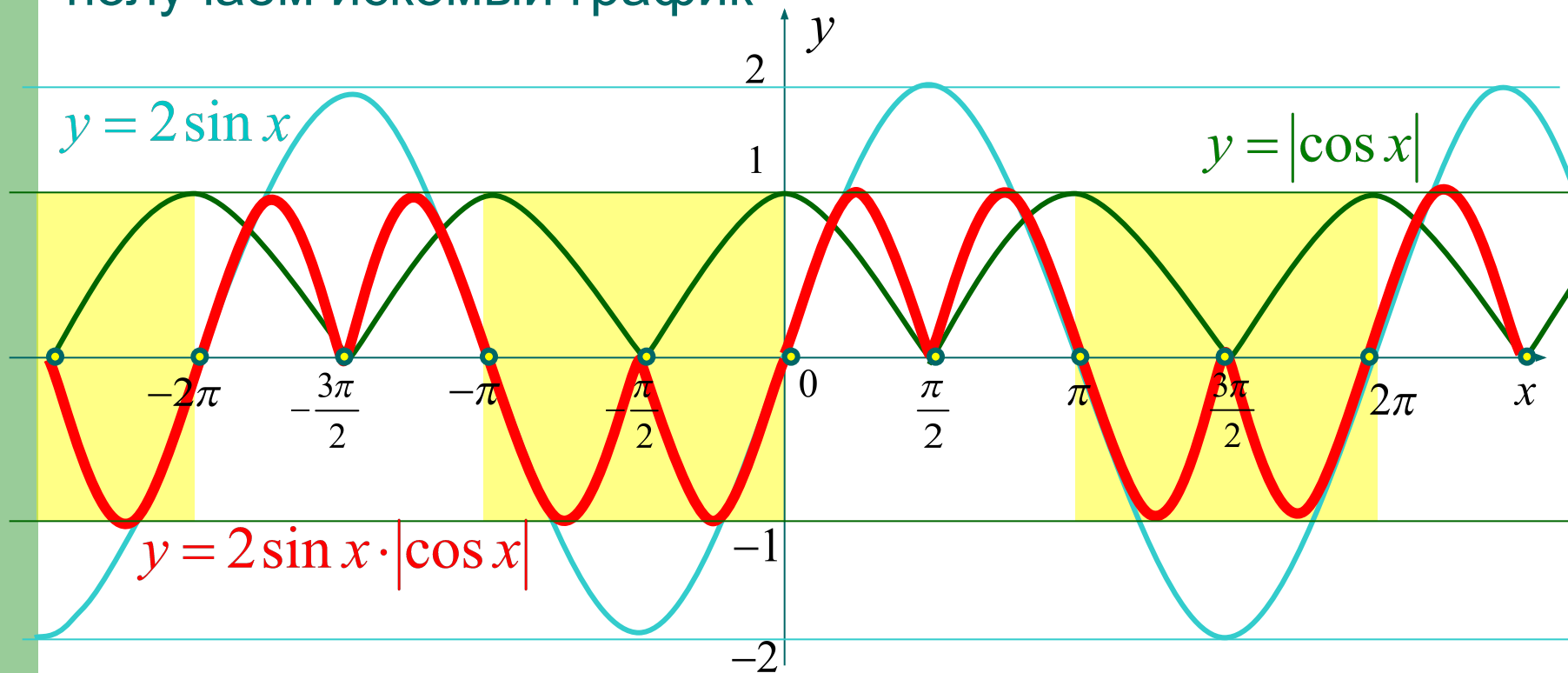
Построим графики

функции

$$y = 2 \sin x \cdot |\cos x|$$

$$y = |\cos x| \quad \text{и} \quad y = 2 \sin x$$

Путем умножения соответствующих координат получаем искомый график



Множества точек на плоскости.

Построить на плоскости множество точек заданных уравнением:

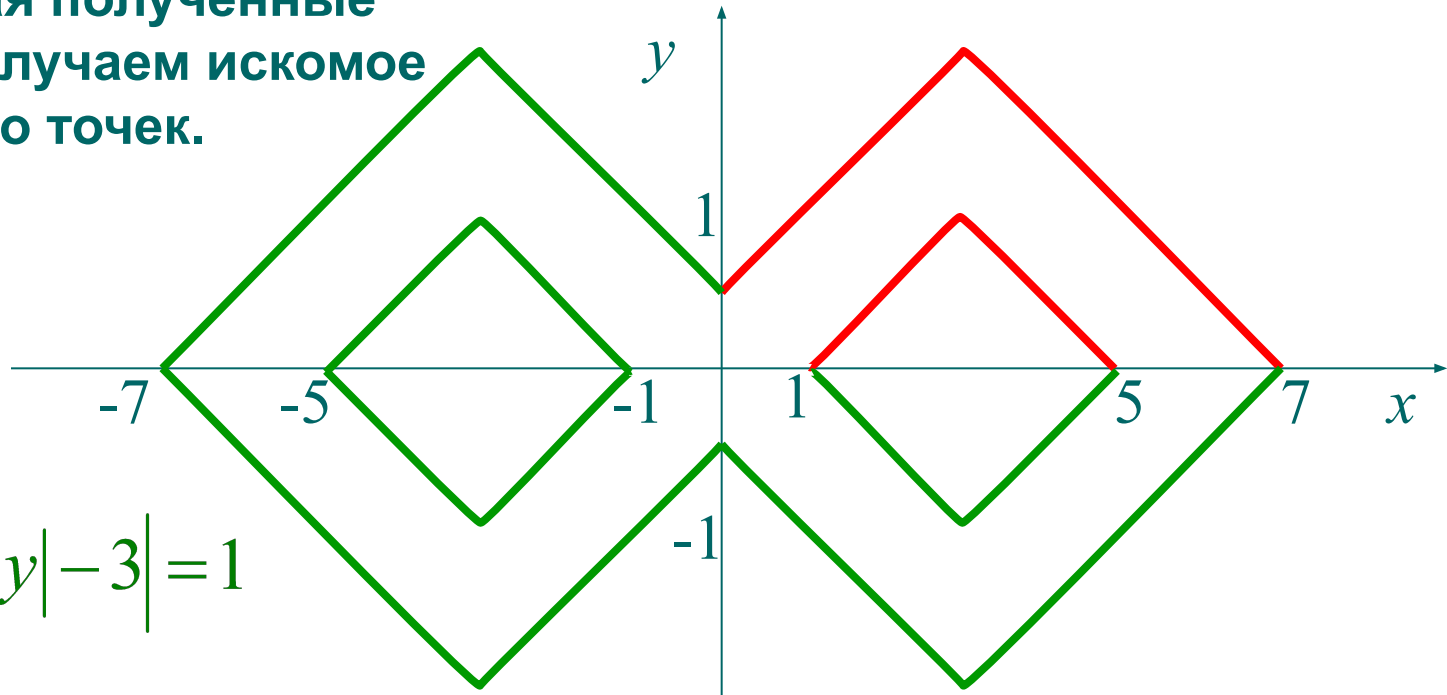
$$\left| \left| x \right| - 3 \right| + \left| y \right| - 3 \right| = 1$$

Заметим, что график симметричен относительно осей координат.

Для I четверти система примет вид:

$$\begin{cases} y = 4 - |x - 3| \\ y = 2 - |x - 3| \end{cases}$$

Отображая полученные линии, получаем искомое множество точек.

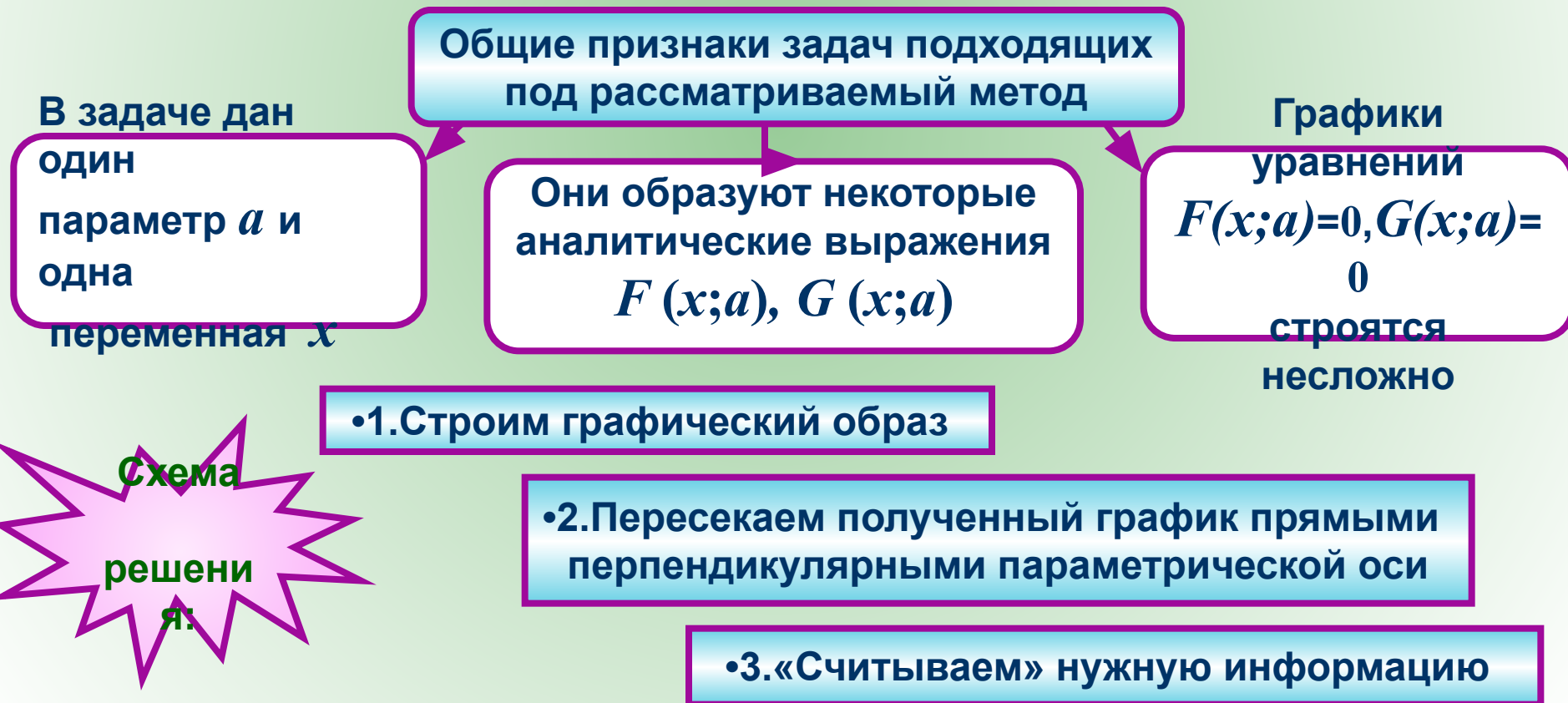


$$\left| \left| x \right| - 3 \right| + \left| y \right| - 3 \right| = 1$$

МЕТОД ОБЛАСТЕЙ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРАМИ



Параметр – «равноправная» переменная \Rightarrow отведем ему координатную ось т. е. задачу с параметром будем рассматривать как функцию $f(x; a) > 0$



Найти все значения a , при которых уравнение

$$(a + 4x - x^2 - 1)(a + 1 - |x - 2|) = 0$$

имеет ровно три корня?

Данное уравнение равносильно совокупности параметра a , выражая которую

$$\begin{cases} a - x^2 + 4x - 1 = 0 \\ a - |x - 2| + 1 = 0 \end{cases}$$

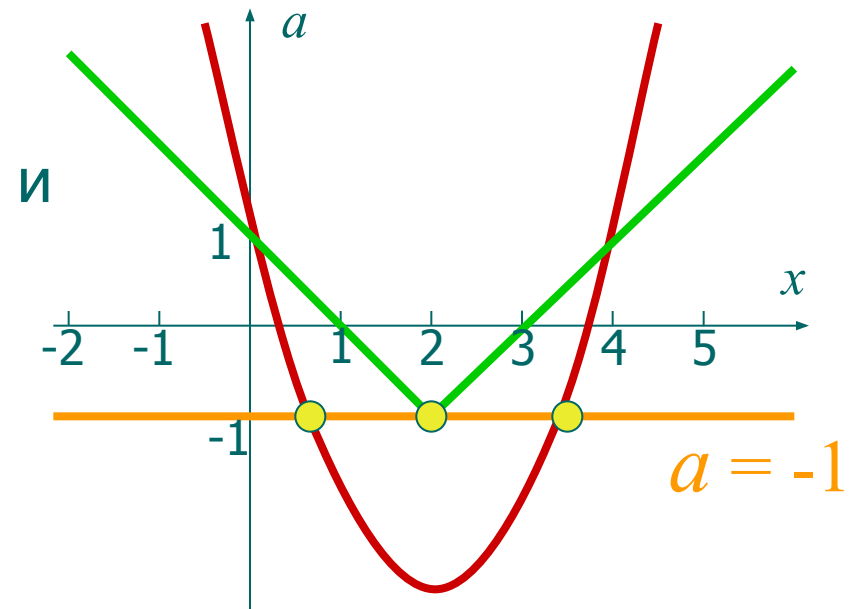
получаем:

$$\begin{cases} a = x^2 - 4x + 1 \\ a = |x - 2| - 1 \end{cases}$$

График этой совокупности – объединение уголка и параболы.

Прямая $a = -1$ пересекает полученное объединение в трех точках.

Ответ: $a = -1$



Сколько решений имеет уравнение $(a - 2x + x^2)(a + 1 - |x - 1|) = 0$ в зависимости от значений параметра a ?

Данное уравнение равносильно совокупности следующих двух уравнений:

$$\begin{cases} x = x^2 - 2 \\ a = |x - 1| - 1 \end{cases}$$

График этой совокупности – объединение уголка и параболы.

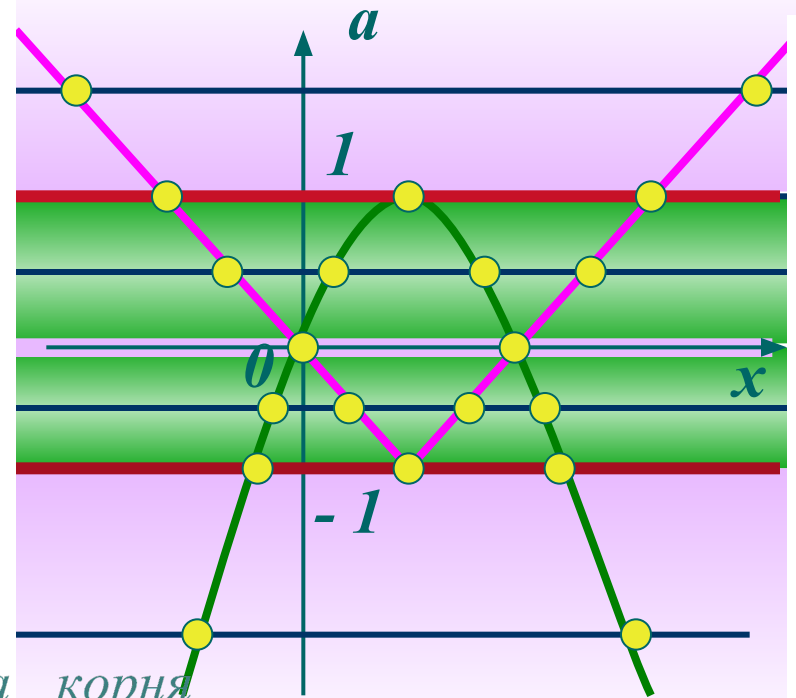
По рисунку «считываем» ответ

Ответ:

если $a < -1$, $a = 0$ и $a > 1$, то два корня

если $a = \pm 1$, то три корня

если $-1 < a < 0$ и $0 < a < 1$, то четыре корня



Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $|2x - a| + 1 = |x + 3|$ имеет единственное решение.

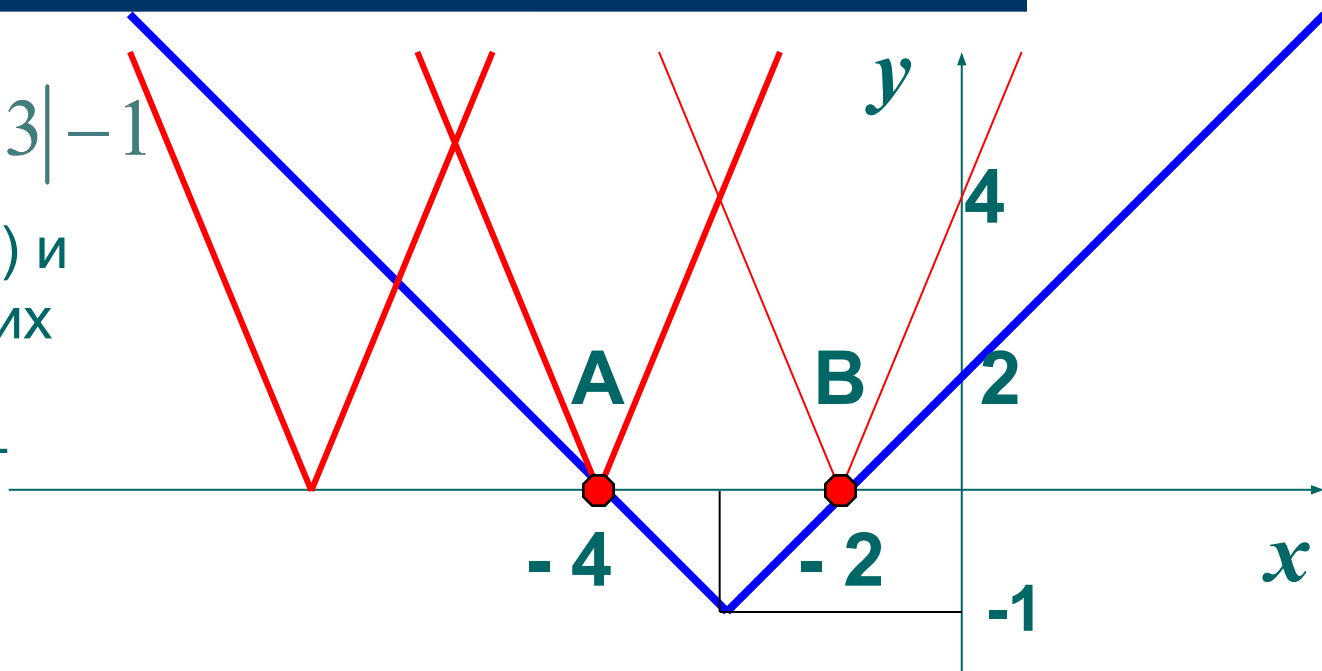
$$|2x - a| = |x + 3| - 1$$

$A(-4; 0)$, $B(-2; 0)$ и координаты этих точек

удовлетворяют уравнению

$$y = |2x - a|.$$

$$\begin{cases} |-8 - a| = 0 \\ |-4 - a| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -8 \\ a = -4 \end{cases}.$$



Ответ: $a = -8, a = -4$

ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД ОБЛАСТЕЙ

(«переход» метода интервалов с прямой на плоскость)

Неравенства с
одной
переменной



Метод интервалов:

1. ОДЗ
2. Корни
3. Ось
4. Знаки на
интервалах
5. Ответ.



Неравенства с
двумя
переменной



Метод областей:

1. ОДЗ
2. Граничные
линии
3. Координатная
плоскость
4. Знаки в областях
5. Ответ по рисунку.

На координатной плоскости
изобразите множество точек,
удовлетворяющих
неравенству $\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2 - 1} \leq 0$

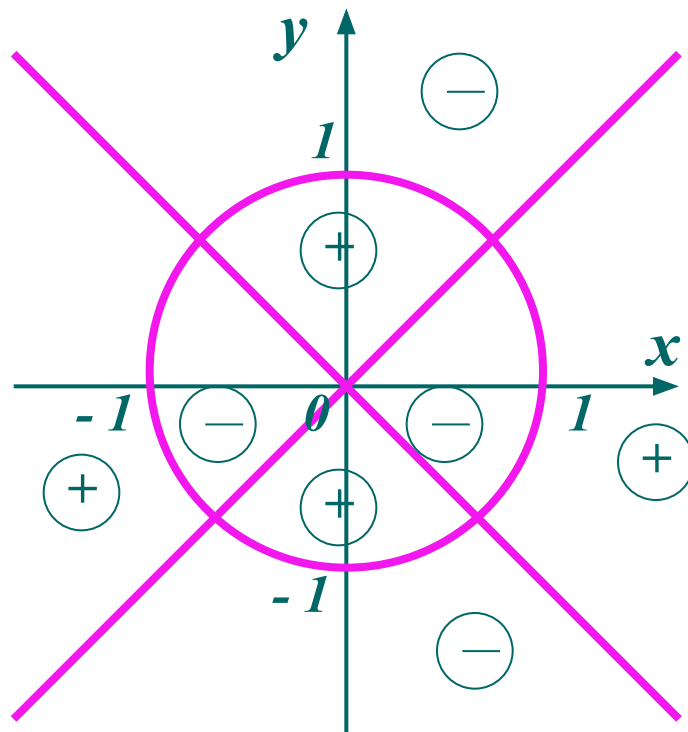
Найдем ОДЗ: $x^2 + y^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \neq 1$
Граничные

линии:

$$x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow |y| = |x|$$

$$\text{и } x^2 + y^2 = 1$$

Строим граничные линии.
Они разбивают плоскость
на восемь областей,
определяя знаки
подстановкой в отдельных
точках, получаем решение.



Сколько решений имеет система
в зависимости от параметра a ?

$$\begin{cases} |x|+|y|=a, \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

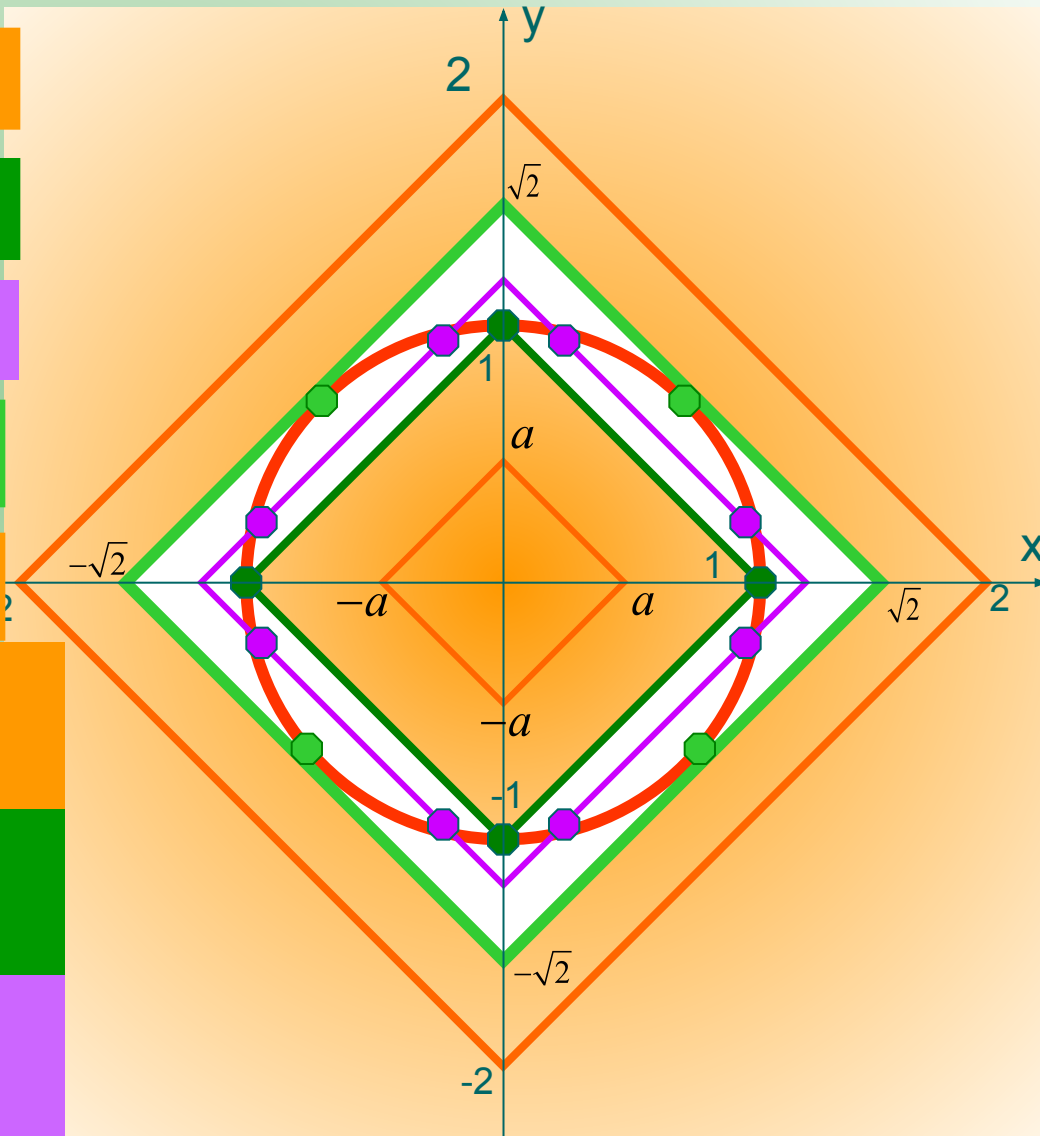
решений нет при $a < 1$

4 решения при $a = 1$

8 решений при $1 < a < \sqrt{2}$

4 решения при $a = \sqrt{2}$

решений нет при $a > \sqrt{2}$



Ответ: решений нет, если
 $a < 1$ или $a > 2\sqrt{2}$

4 решения, если
 $a = 1$ или $a = 2\sqrt{2}$

8 решений, если
 $1 < a < \sqrt{2}$

Найти все значения параметра p , при каждом из которых

множество решений неравенства $(p - x^2)(p + x - 2) < 0$ содержит решения неравенства $|x| \leq 1$

Применим обобщенный метод областей.

Построим граничные линии

$$p = x^2 \text{ и } p = 2 - x$$

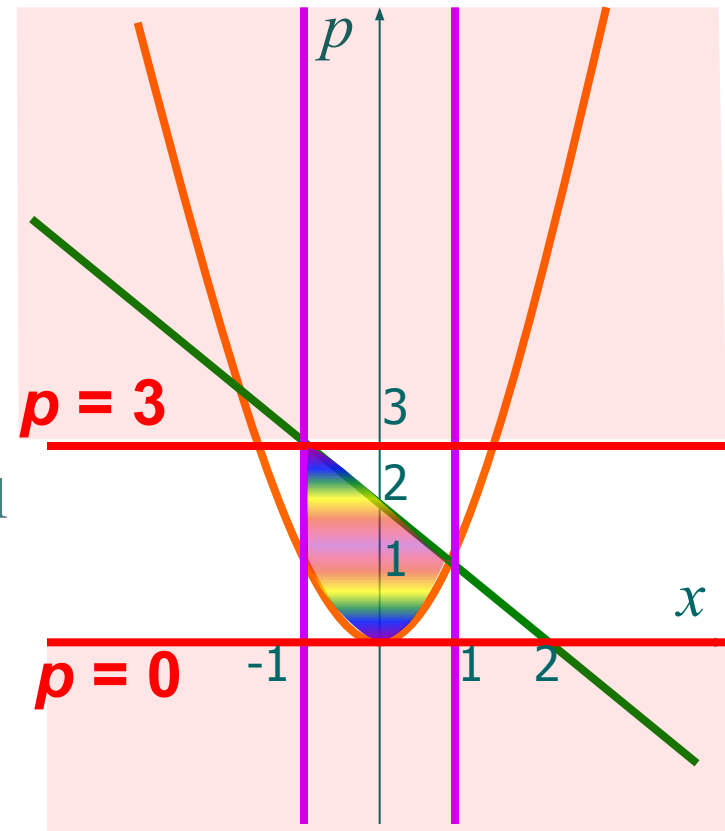
Определим знаки в полученных областях, и получим решение данного неравенства.

Осталось из полученного множества исключить решения неравенства $|x| \leq 1$

По рисунку легко считываем ответ

$$p \leq 0, p \geq 3$$

Ответ: $p \leq 0, p \geq 3$



При каких положительных значениях параметра a , система уравнений имеет ровно четыре решения?

$$\begin{cases} |4 - |x - 2|| - |y| = 0 \\ x^2 + y^2 = a^2 + 4(x - 1) \end{cases}$$

Запишем $|4 - |x - 2|| = |y|$

решений нет при $a < 2\sqrt{2}$

Построим графики обоих уравнений.

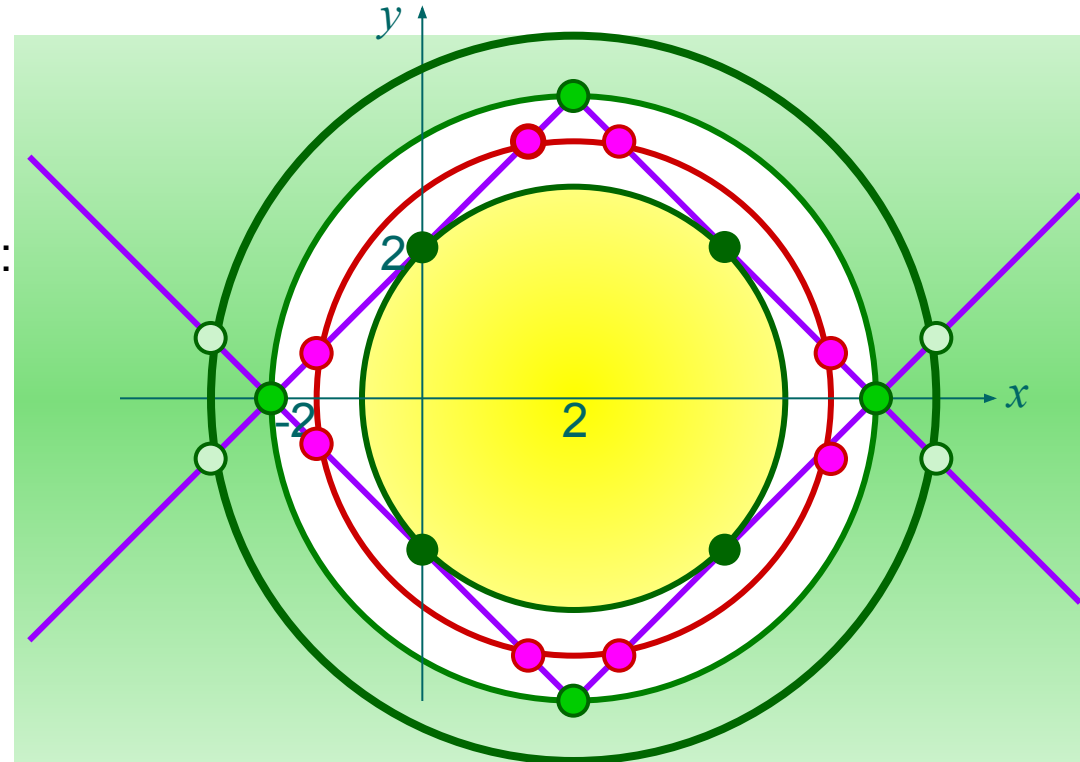
4 решения при $a = 2\sqrt{2}$

$y = |4 - |x - 2||$ и симметрично

8 решений при $2\sqrt{2} < a < 4$.

Второе уравнение задает семейство

4 решения при $a \geq 4$



Итак:

при $a < 2\sqrt{2}$ решений нет; при $a = 2\sqrt{2}$ и $a \geq 4$ система имеет 4 решения; система имеет 8 решений при $2\sqrt{2} < a < 4$.

Ответ: $a = 2\sqrt{2}$ $4 a \geq$

Найти все значения параметра a при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6|x| - 6|y| + 17 \leq 0 \\ x^2 - a^2 = -y^2 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

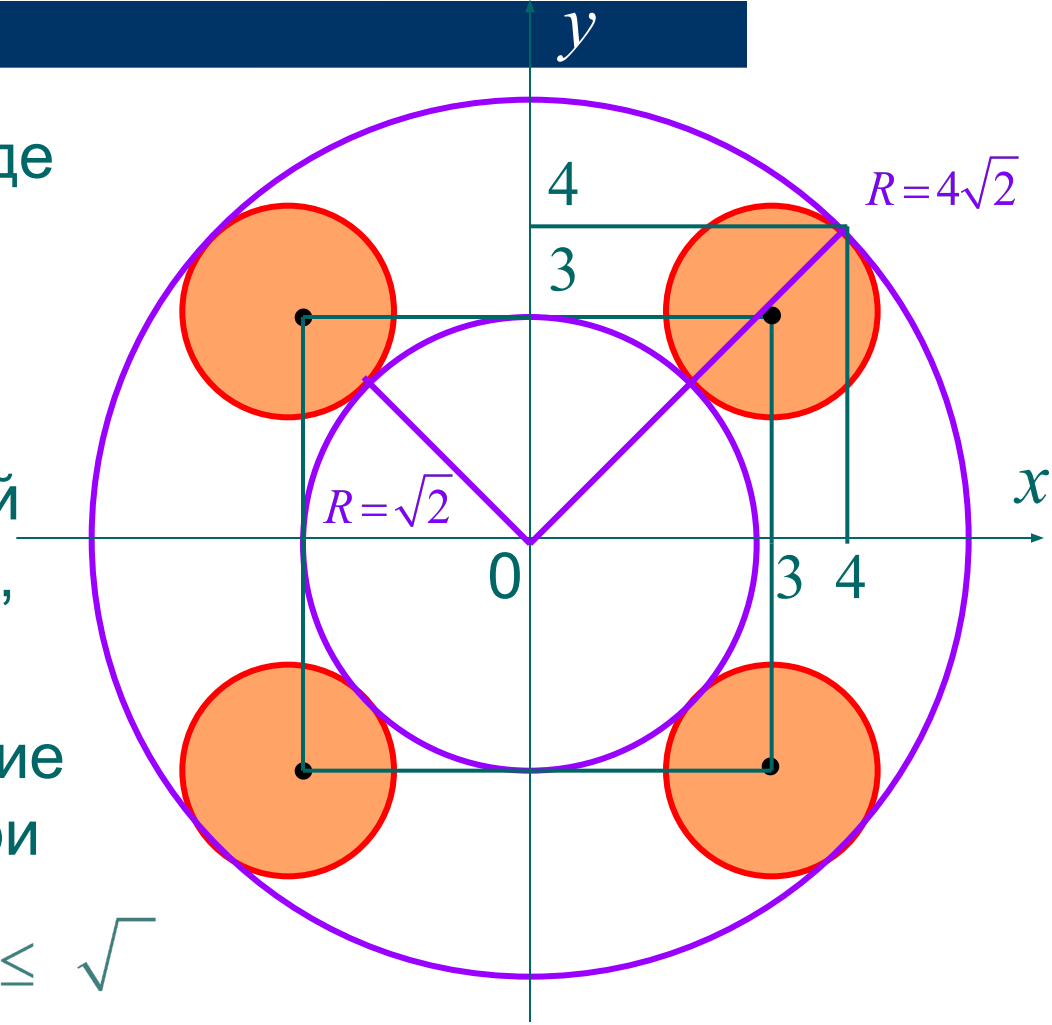
Запишем систему в виде

$$\begin{cases} (|x| - 3)^2 + (|y| - 3)^2 \leq 1 \\ x^2 + a^2 = -y^2 \end{cases}$$

Построим графический образ соответствий, входящих в систему.

Очевидно, что условие **Ответ** выполняется при

$$-4\sqrt{2} \leq a \leq -\sqrt{2} \quad \sqrt{2} \leq a \leq 4\sqrt{2}$$



Найти сумму целых значений параметра a при которых уравнение имеет три корня

$$(a + 2x - x^2 + 19)(a - 3 - |x - 4|) = 0$$

$$\begin{cases} a - x^2 + 2x + 19 = 0 \\ a - 3 - |x - 4| = 0 \end{cases}$$

Выражая параметр a , получаем:

$$\begin{cases} a = x^2 - 2x - 19 \\ a = |x - 4| + 3 \end{cases}$$

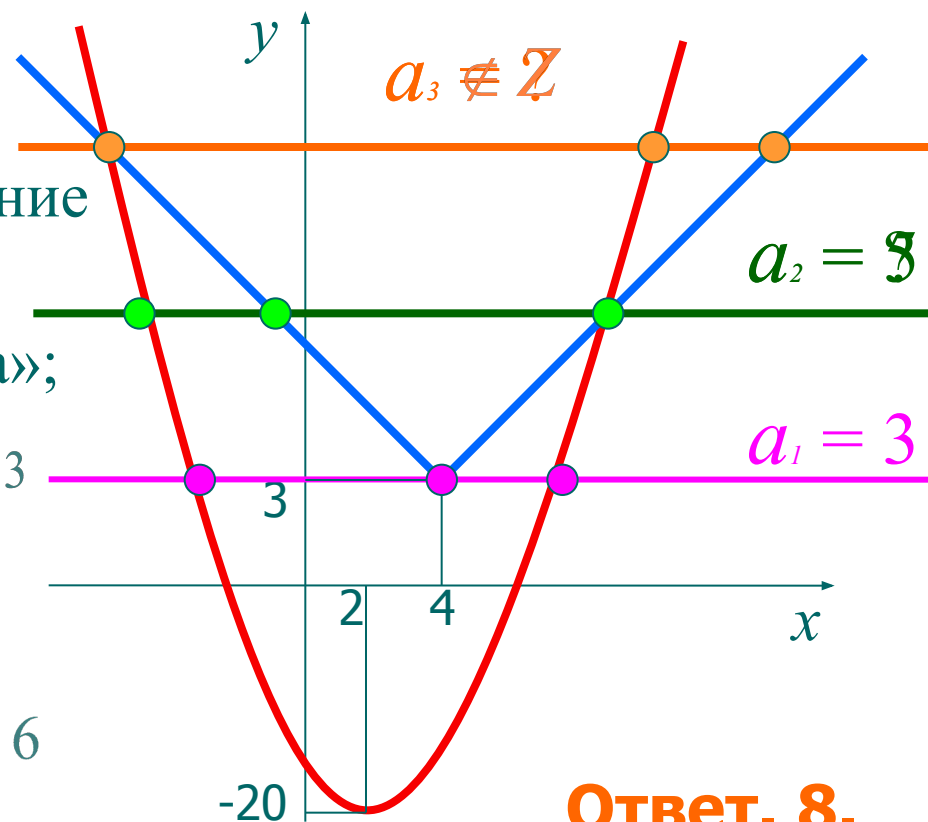
Из рисунка видно, что уравнение имеет три корня в 3 случаях.

1) При $a = 3$, «вершина уголка»;

2) При $x < 4$, $x^2 - 2x - 19 = -(-4) + 3$
 $x^2 - x - 26 = 0, x_{1,2} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \emptyset$

3) При $x > 4$, $x^2 - 2x - 19 = x - 4 + 3$,
 $x^2 - 3x - 18 = 0, x_1 = -3(\emptyset), x_2 = 6$

Тогда $a = 6 - 4 + 3 = 5$.



Ответ. 8.