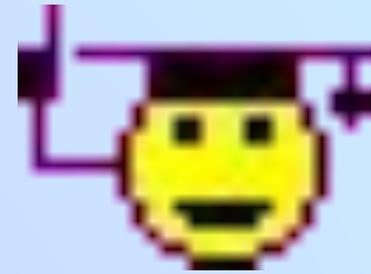


# **Лекции по алгебре и началам анализа**

**11 класс**

# Лекция №5



## Показательные и логарифмические неравенства

# 1. Показательные неравенства

## 1.1. Решение простейших показательных неравенств

Простейшими показательными неравенствами называются неравенства вида

$$a^x > b, a^x \geq b, a^x < b, a^x \leq b, \quad \text{где } a > 0, a \neq 1$$

## Рассмотрим решение неравенства

$$a^x > b, \quad \text{где } a > 0, a \neq 1$$

Решение:

$$a) a > 1, b > 0 \quad x \in (\log_a b; +\infty)$$

$$b) 1 < a < 0, b > 0 \quad x \in (-\infty; \log_a b)$$

$$c) a > 0, b < 0 \quad x \in R$$

---

## Рассмотрим решение неравенства

$$a^x < b, \quad \text{где } a > 0, a \neq 1$$

Решение:

$$a) a > 1, b > 0 \quad x \in (-\infty; \log_a b)$$

$$b) 1 < a < 0, b > 0 \quad x \in (\log_a b; +\infty)$$

$$c) a > 0, b < 0 \quad x \in \emptyset$$

## 1.2. Решение показательных неравенств вида

$$a^{f(x)} > a^{g(x)}, \quad \text{где } a > 0, a \neq 1$$

## Рассмотрим решение неравенства

$$a^{f(x)} < a^{g(x)}, \quad \text{где } a > 0, a \neq 1$$

Решение:  $a) a > 1, \quad f(x) < g(x)$

$$b) 1 < a < 0, \quad f(x) > g(x)$$

---

## Рассмотрим решение неравенства

$$a^{f(x)} > a^{g(x)}, \quad \text{где } a > 0, a \neq 1$$

Решение:  $a) a > 1, \quad f(x) > g(x)$

$$b) 1 < a < 0, \quad f(x) < g(x)$$

### **1.3. Решение показательных неравенств** **с помощью замены переменных**

## 1.4. Решение сложных показательных неравенств

Сложными показательными неравенствами называются неравенства вида

$$f(x)^{g_1(x)} \vee f(x)^{g_2(x)}$$

Рассмотрим решение неравенства

$$f(x)^{g_1(x)} > f(x)^{g_2(x)}$$

Решение:

$$\left[ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} f(x) > 1 \\ g_1(x) > g_2(x) \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} 0 < f(x) < 1 \\ g_1(x) < g_2(x) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (f(x) - 1) \cdot (g_1(x) - g_2(x)) > 0 \\ f(x) > 0 \end{cases}$$

# Рассмотрим решение неравенства

$$f(x)^{g_1(x)} \geq f(x)^{g_2(x)}$$

Решение:

$$\left[ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} f(x) \geq 1 \\ g_1(x) \geq g_2(x) \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} 0 < f(x) \leq 1 \\ g_1(x) \leq g_2(x) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (f(x) - 1) \cdot (g_1(x) - g_2(x)) \geq 0 \\ f(x) > 0 \end{array} \right.$$

# Рассмотрим решение неравенства

$$f(x)^{g_1(x)} < f(x)^{g_2(x)}$$

Решение:

$$\left[ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} f(x) > 1 \\ g_1(x) < g_2(x) \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} 0 < f(x) < 1 \\ g_1(x) > g_2(x) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (f(x) - 1) \cdot (g_1(x) - g_2(x)) < 0 \\ f(x) > 0 \end{cases}$$

Рассмотрим решение неравенства

$$f(x)^{g_1(x)} \leq f(x)^{g_2(x)}$$

Решение:

$$\left[ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} f(x) \geq 1 \\ g_1(x) \leq g_2(x) \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} 0 < f(x) \leq 1 \\ g_1(x) \geq g_2(x) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (f(x) - 1) \cdot (g_1(x) - g_2(x)) \leq 0 \\ f(x) > 0 \end{array} \right.$$

## 2. Логарифмические неравенства

### 2.1. Решение простейших логарифмических неравенств

Простейшими логарифмическими неравенствами называются неравенства вида

$$\log_a x > b, \log_a x \geq b, \log_a x < b, \log_a x \leq b$$

где  $a > 0, a \neq 1$

Рассмотрим решение неравенства

$$\log_a x > b, \quad \text{где } a > 0, a \neq 1$$

Решение:

$$a) a > 1, \quad x \in (a^b; +\infty)$$

$$b) 0 < a < 1, \quad x \in (0; a^b)$$

---

Рассмотрим решение неравенства

$$\log_a x < b, \quad \text{где } a > 0, a \neq 1$$

Решение:

$$a) a > 1, \quad x \in (0; a^b)$$

$$b) 0 < a < 1, \quad x \in (a^b; +\infty)$$

## 2.2. Решение логарифмических неравенств вида

$$\log_a f(x) \vee \log_a g(x), \quad \text{где } a > 0, a \neq 1$$

Рассмотрим решение неравенства

$$\log_a f(x) > \log_a g(x), \quad \text{где } a > 0, a \neq 1$$

Решение:

$$a) a > 1, \quad \begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

$$b) 1 < a < 0, \quad \begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$$

---

Рассмотрим решение неравенства

$$\log_a f(x) < \log_a g(x), \quad \text{где } a > 0, a \neq 1$$

Решение:

$$a) a > 1, \quad \begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$$

$$b) 1 < a < 0, \quad \begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

## **2.3. Решение логарифмических неравенств** **с помощью замены переменных**

## 2.4. Решение сложных логарифмических неравенств

Сложными логарифмическими неравенствами называются неравенства вида

$$\log_{f(x)} g_1(x) \vee \log_{f(x)} g_2(x)$$

Рассмотрим решение неравенства

$$\log_{f(x)} g_1(x) < \log_{f(x)} g_2(x)$$

Решение:

$$\left[ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} f(x) > 1 \\ g_1(x) < g_2(x) \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} g_1(x) > 0 \\ 0 < f(x) < 1 \\ g_1(x) > g_2(x) \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} g_2(x) > 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Рассмотрим решение неравенства

$$\log_{f(x)} g_1(x) \leq \log_{f(x)} g_2(x)$$

Решение:

$$\left[ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} f(x) > 1 \\ g_1(x) \leq g_2(x) \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} g_1(x) > 0 \\ 0 < f(x) < 1 \\ g_1(x) \geq g_2(x) \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} g_2(x) > 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Рассмотрим решение неравенства

$$\log_{f(x)} g_1(x) > \log_{f(x)} g_2(x)$$

Решение:

$$\left[ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} f(x) > 1 \\ g_1(x) > g_2(x) \\ g_2(x) > 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} 0 < f(x) < 1 \\ g_1(x) < g_2(x) \\ g_1(x) > 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Рассмотрим решение неравенства

$$\log_{f(x)} g_1(x) \geq \log_{f(x)} g_2(x)$$

Решение:

$$\left[ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} f(x) > 1 \\ g_1(x) \geq g_2(x) \end{array} \right. \\ g_2(x) > 0 \\ \left\{ \begin{array}{l} 0 < f(x) < 1 \\ g_1(x) \leq g_2(x) \end{array} \right. \\ g_1(x) > 0 \end{array} \right.$$