

Квадратичная функция



Квадратичная функция

- Определение
- График
- Свойства функции
- График и свойства функции $y = ax^2$
- Сдвиг графика $y = ax^2$
- Способы построения параболы
- Квадратичная функция в заданиях ГИА
- Примеры и комментарии
- Задания ГИА

Резюме

Квадратичная функция

Квадратичной функцией называют функцию, которую можно задать формулой вида $y = ax^2 + bx + c$, где a , b и c - некоторые числа, причём $a \neq 0$.

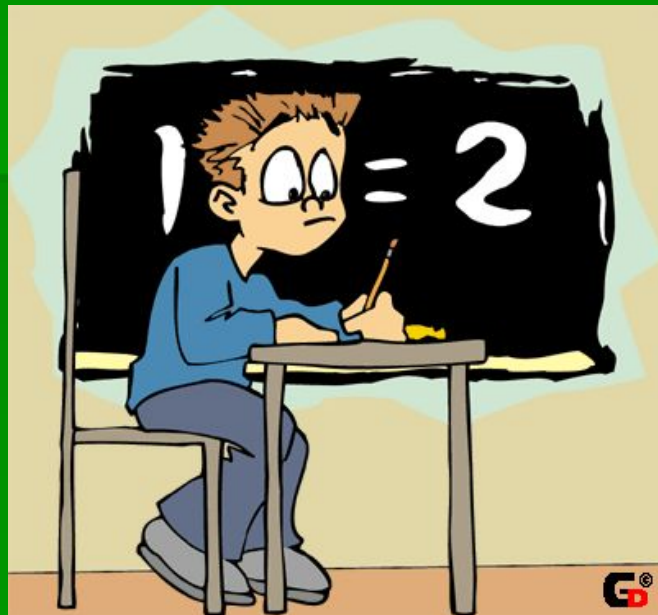


График любой квадратичной функции — парабола.

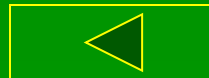
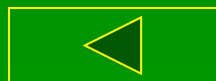
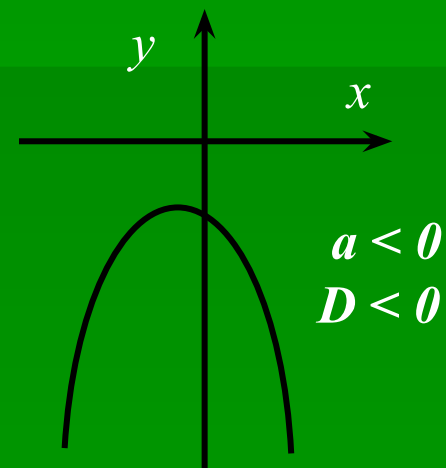
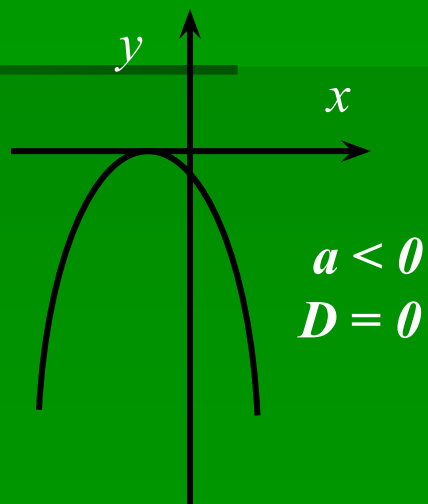
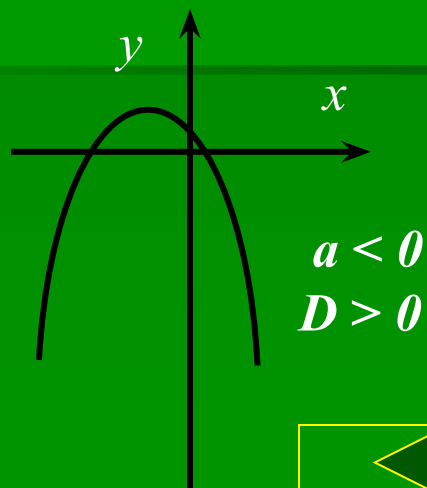
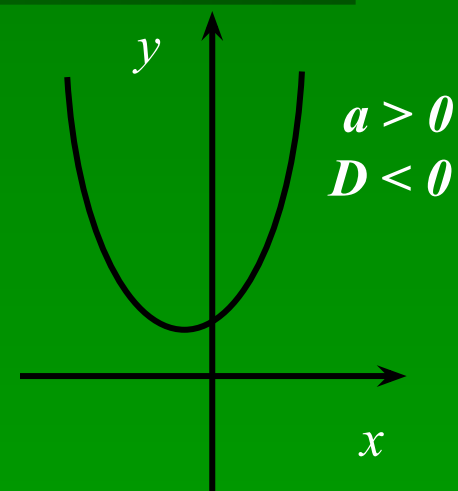
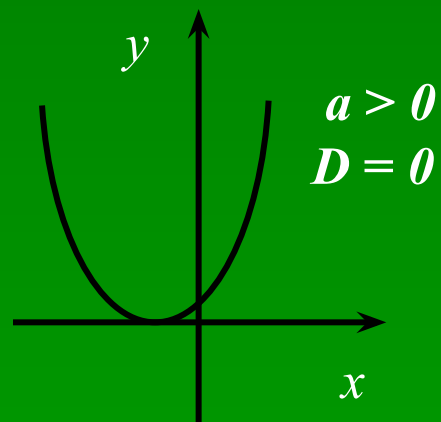
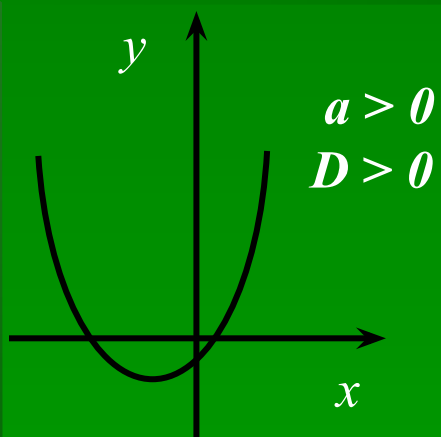
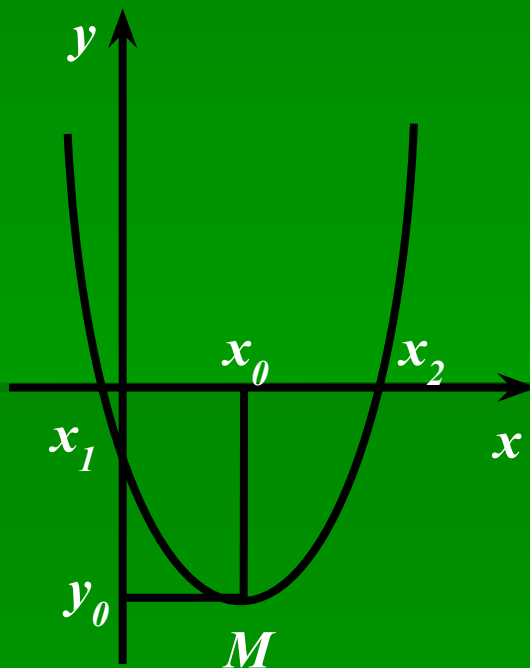


График функции



График

- $y = ax^2 + bx + c,$



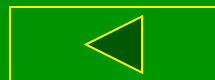
- $D = b^2 - 4ac$ - дискриминант

- $M(x_0, y_0)$ – вершина параболы:
 $x_0 = -\frac{b}{2a}, y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$

- Уравнение параболы, проходящей через точку M :

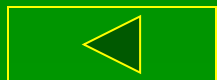
$$y = a(x - x_0)^2 + y_0$$

- x_1, x_2 – корни параболы:
 $ax^2 + bx + c = 0$



Свойства функции

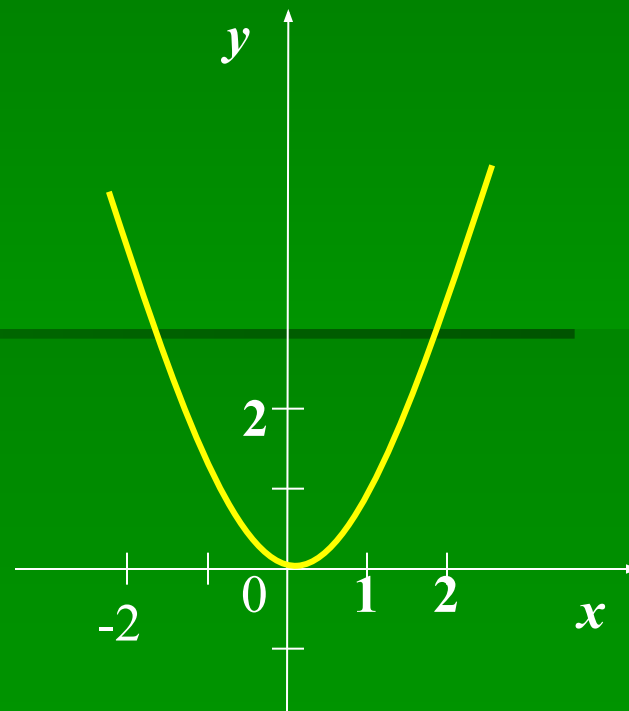
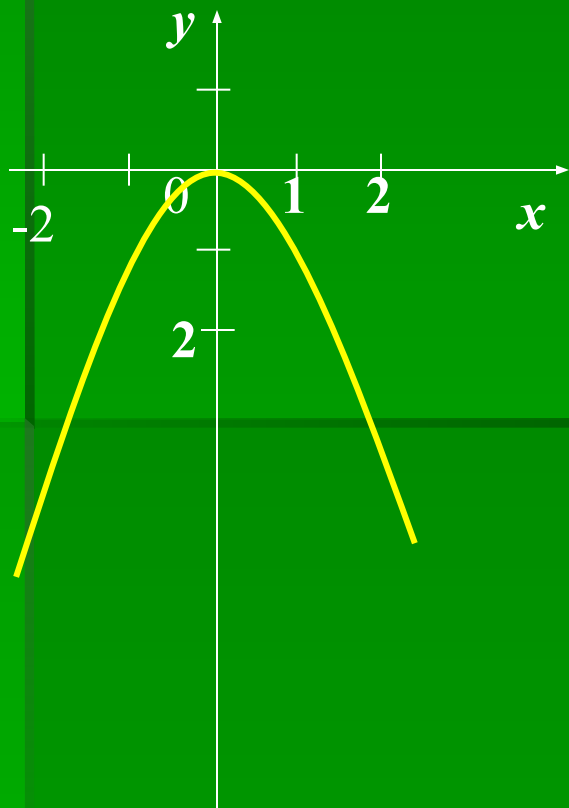
- 1. Нули функции: $y=0$ (пересечения с осью Ox)
- 2. Точки пересечения с осью Oy
- 3. Возрастание функции(если $X_2 > X_1$, то $f(X_2) > f(X_1)$):
с возрастанием аргумента увеличивается значение функции.
Убывание функции(если $X_2 > X_1$, то $f(X_2) < f(X_1)$):
с возрастанием аргумента уменьшается значение функции
- аргумент и функция связаны противоположными знаками.
- 4. Промежутки знакопостоянства : $f(x) > 0$ и $f(x) < 0$.
- 5. Непрерывность функции (разрыв - нельзя провести график не отрываясь).
- 6. Наибольшее и наименьшее значение.



Функция $y=x^2$

Построим график функции $y=x^2$

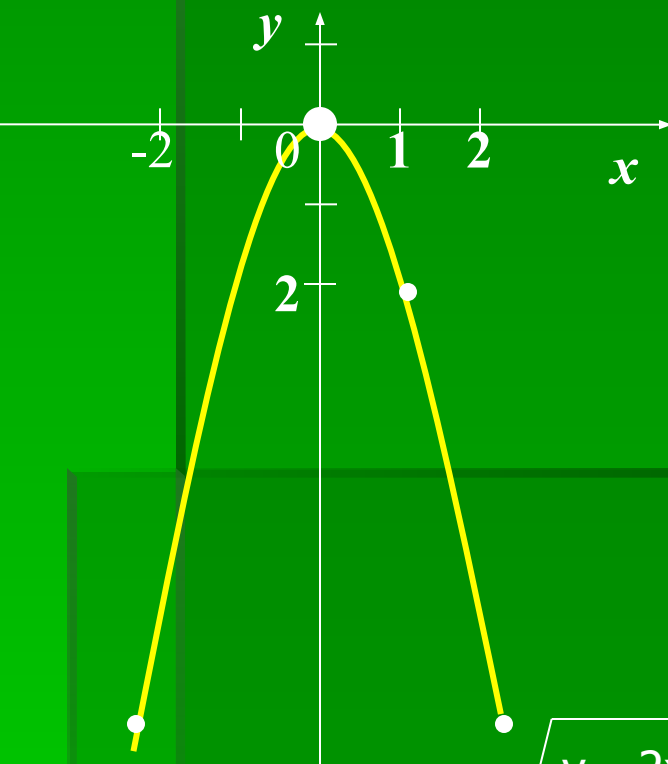
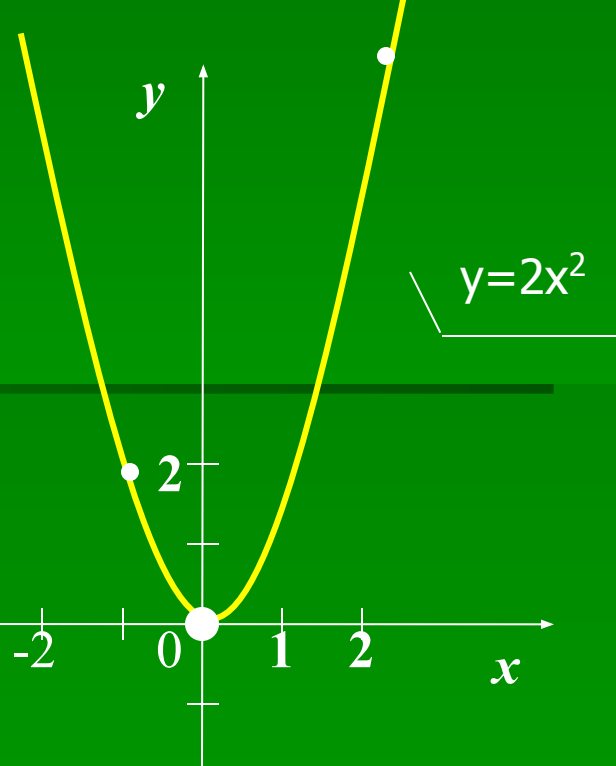
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y=x^2$	9	4	1	0	1	4	9



Функция $y=ax^2$

Построим график функции $y=2x^2$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y=2x^2$	18	8	2	0	2	8	18



$a > 0$

Построим график функции $y=-2x^2$

$a < 0$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y=2x^2$	-18	-8	-2	0	-2	-8	-18

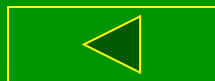
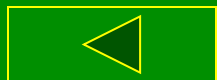


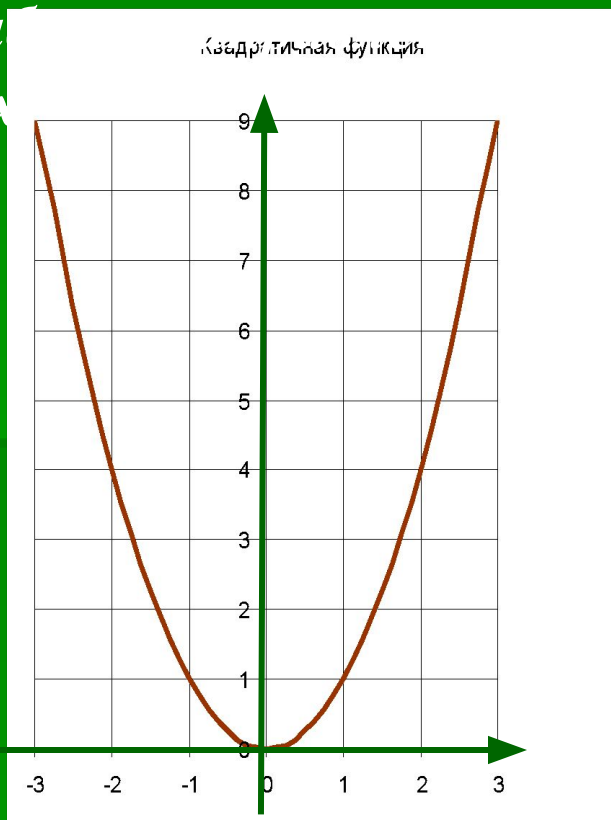
График и свойства функции $y=ax^2$

Графиком функции $y=ax^2$, где $a \neq 0$,
является парабола с вершиной в
начале координат;
её осью симметрии служит ось y ;
при при $a > 0$ ветви параболы
направлены вверх,
при при $a < 0$ ветви вниз.

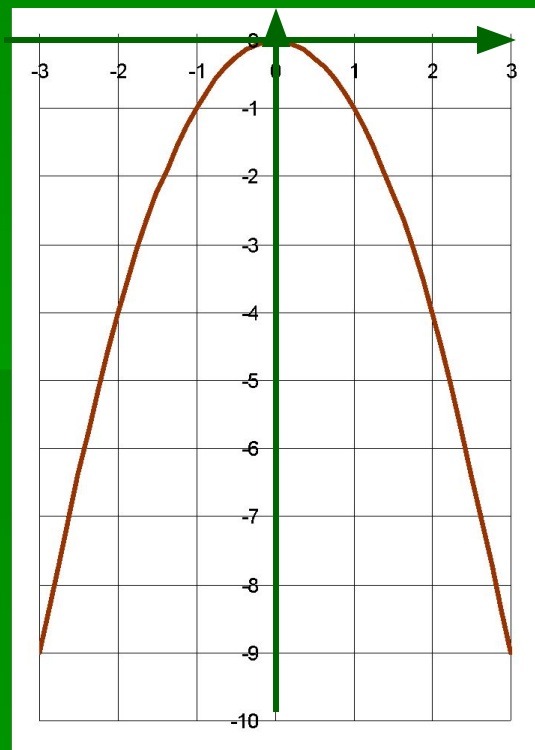


Свойства квадратичной функции $y = ax^2$

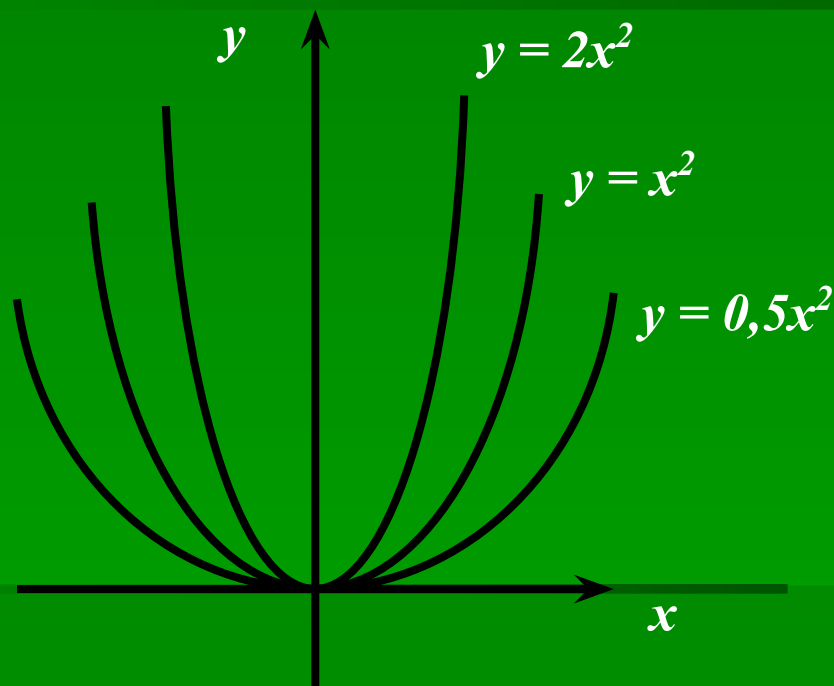
При $a > 0$ ветви
параболы направлены
вверх



При $a < 0$ ветви
параболы направлены
вниз

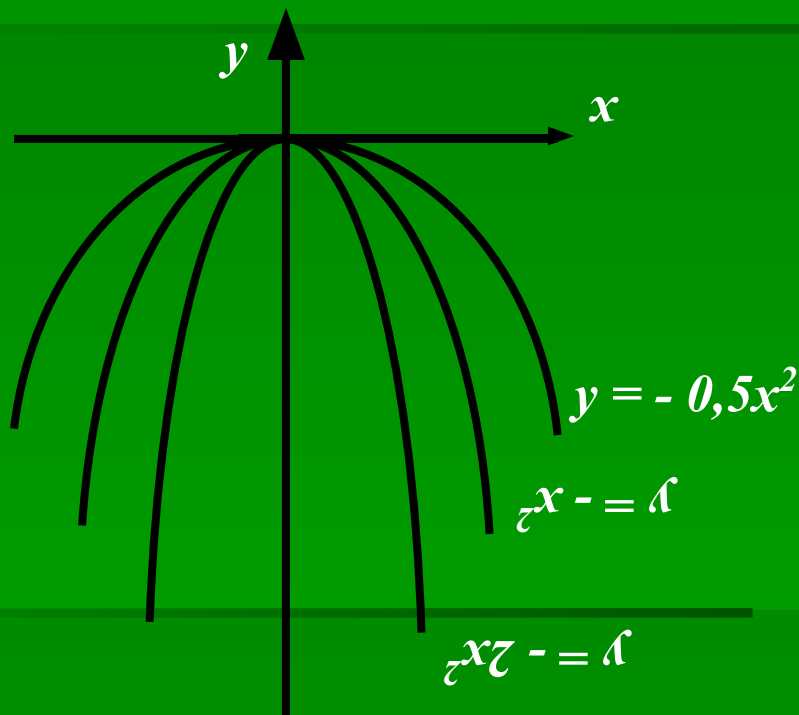


Свойства $y = ax^2$ при $a > 0$



1. $D(y) = \mathbb{R}$
2. $E(y) = [0; +\infty)$
3. четная, т.к. $y(-x) = y(x)$
4. Возрастает
на промежутке $[0; +\infty)$
5. Убывает
на промежутке $(-\infty; 0]$
6. Наименьшее значение
равное 0 при $x = 0$

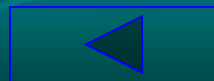
Свойства $y = ax^2$ при $a < 0$



1. $D(y) = \mathbb{R}$
2. $E(y) = (-\infty; 0]$
3. четная, т.к. $y(-x) = y(x)$
4. Возрастает
на промежутке $(-\infty; 0]$
5. Убывает
на промежутке $[0; +\infty)$
6. Наибольшее значение
равное 0 при $x = 0$

Сдвиг графика функции $y = ax^2$ вдоль осей координат

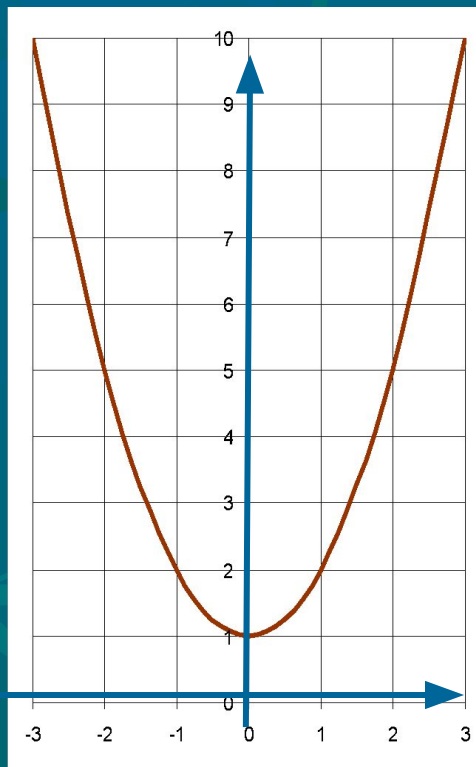
- 1. Чтобы построить график функции $y = ax^2 + g$, нужно перенести параболу $y = ax^2$ вдоль оси на g единиц вверх, если $g > 0$, или на $|g|$ единиц вниз, если $g < 0$. При этом вершина параболы окажется в точке $(0; g)$.
- 2. Чтобы построить график функции $y = a(x + p)^2$, нужно перенести параболу $y = ax^2$ вдоль оси x на p единиц влево, если $p > 0$, или на $|p|$ единиц вправо, если $p < 0$. При этом вершина параболы окажется в точке $(-p; 0)$.
- 3. Чтобы построить график функции $y = a(x + p)^2 + g$, нужно перенести параболу $y = ax^2$ вдоль оси x на p единиц влево, если $p > 0$, или на $|p|$ единиц вправо, если $p < 0$ и вдоль оси y на g единиц вверх, если $g > 0$, или на $|g|$ единиц вниз, если $g < 0$. При этом вершина параболы окажется в точке $(-p; g)$.



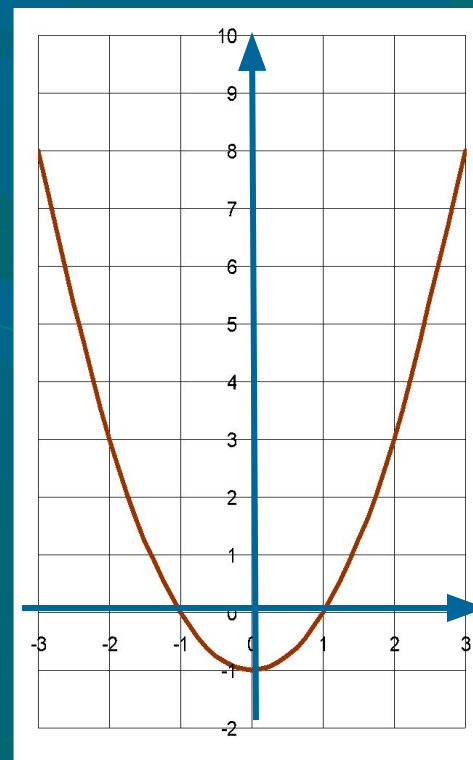
Функция $y = ax^2 + g$

1) $g > 0$

0



2) $g < 0$

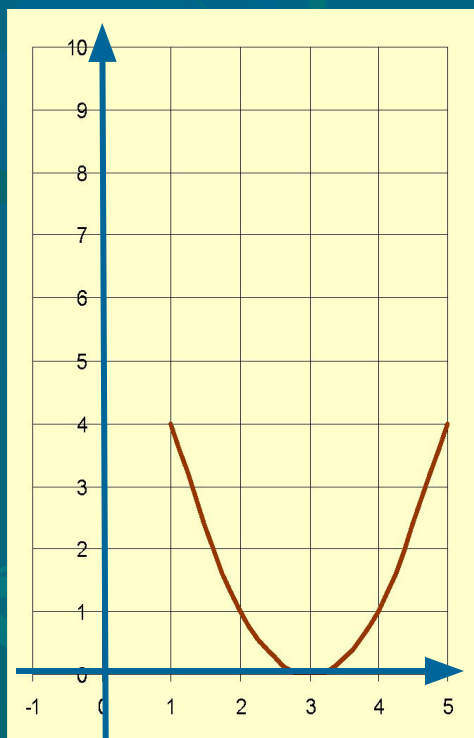


Данный график получается

смещением параболы $y = ax^2$ по оси Oy на g единиц вверх (если $g > 0$) или вниз (если $g < 0$)

Функция $y = a(x - p)^2$

1) $p > 0$



2) $p < 0$

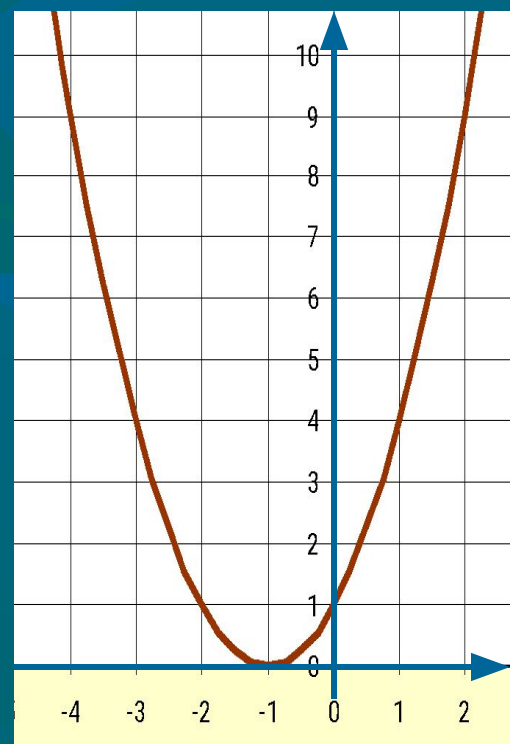


График получается

смещением параболы $y = ax^2$ по оси Ox на p единиц вправо (если $p > 0$) или влево (если $p < 0$)

Способы построения графика квадратичной функции

1 СПОСОБ

Схема

Пример №1

Пример №2

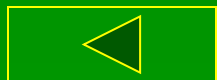
2 СПОСОБ

Пример №3

3 СПОСОБ

Пример №4

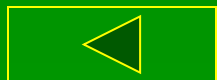
Пример №5



1 СПОСОБ.

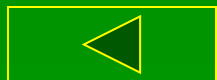
Схема построения графика квадратичной функции
 $y = ax^2 - bx + c$:

- Построить вершину параболы.
- Провести через вершину параболы прямую, параллельную оси ординат, - ось симметрии параболы.
- Найти нули функции, если они есть, и построить на оси абсцисс соответствующие точки параболы.
- Построить дополнительные точки.
- Провести через построенные точки параболу.



2 СПОСОБ.

Построение параболы по точкам с ординатой, равной свободному члену квадратного трёхчлена $ax^2 - bx + c$.



3 СПОСОБ.

$$y=a(x-m)^2 + n$$

График функции $y=a(x-m)^2+n$ получается
сдвигом графика функции $y=ax^2$
на m единичных отрезков по оси Ox и
на n единичных отрезков по оси Oy .

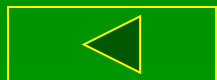
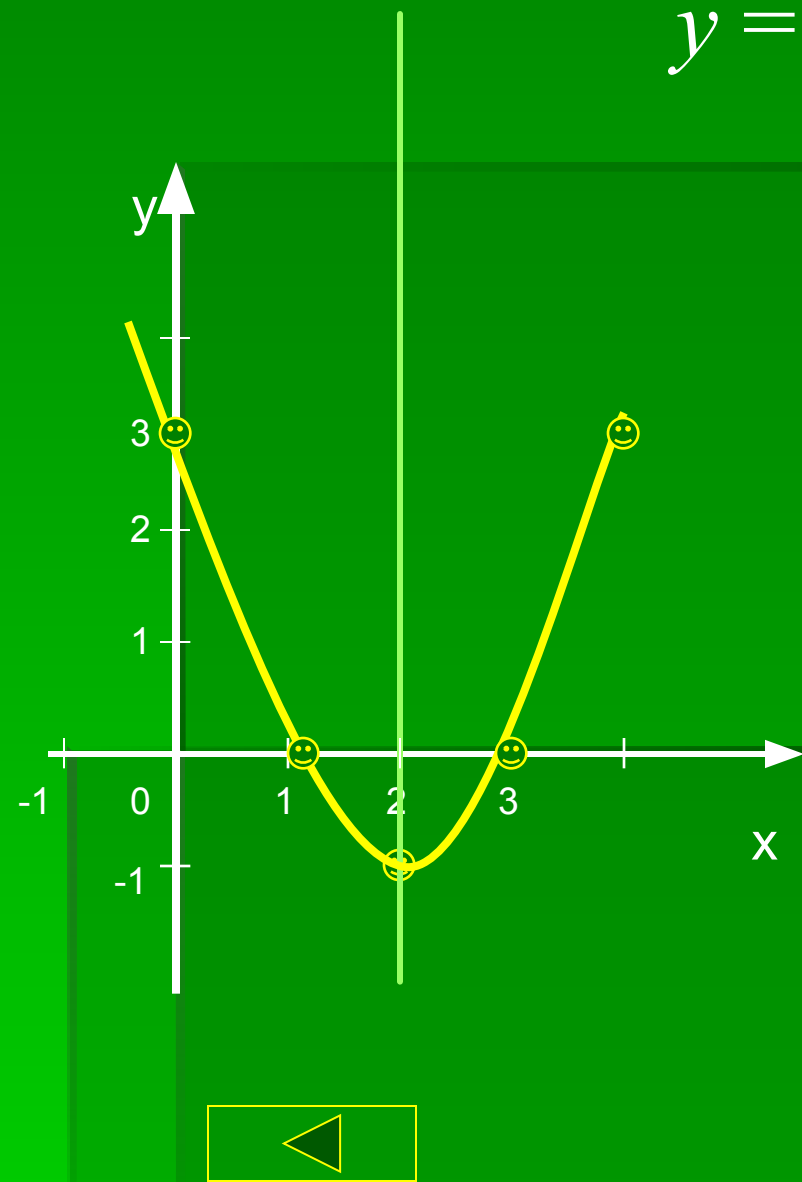


Схема построения параболы:

$$y = x^2 - 4x + 3$$



- Найти координаты вершины параболы: $M(2;-1)$.

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2} = 2$$

$$y_0 = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = \\ = 4 - 8 + 3 = 7 - 8 = -1$$

- Провести ось симметрии: $x = 2$.
- Найти нули функции при $y = 0$: $(1;0)$ и $(3;0)$
- Найти дополнительные точки: при $x=0, y=3$; при $x=4, y=3$.
- Соединить полученные точки.

Пример №1

$$y = 3x^2 + 12x + 9$$

Графиком функции является парабола , ветви параболы направлены вверх , т.к. $a = 3$, $a > 0$.

$M(x_0; y_0)$ - вершина параболы

$$x_0 = \frac{-b}{2a}; \quad x_0 = -12 : 6 = -2$$

$$y_0 = 3(-2)^2 + 12(-2) + 9 = -3. \quad M(-2; -3)$$

Прямая $x = -2$ – ось симметрии

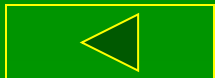
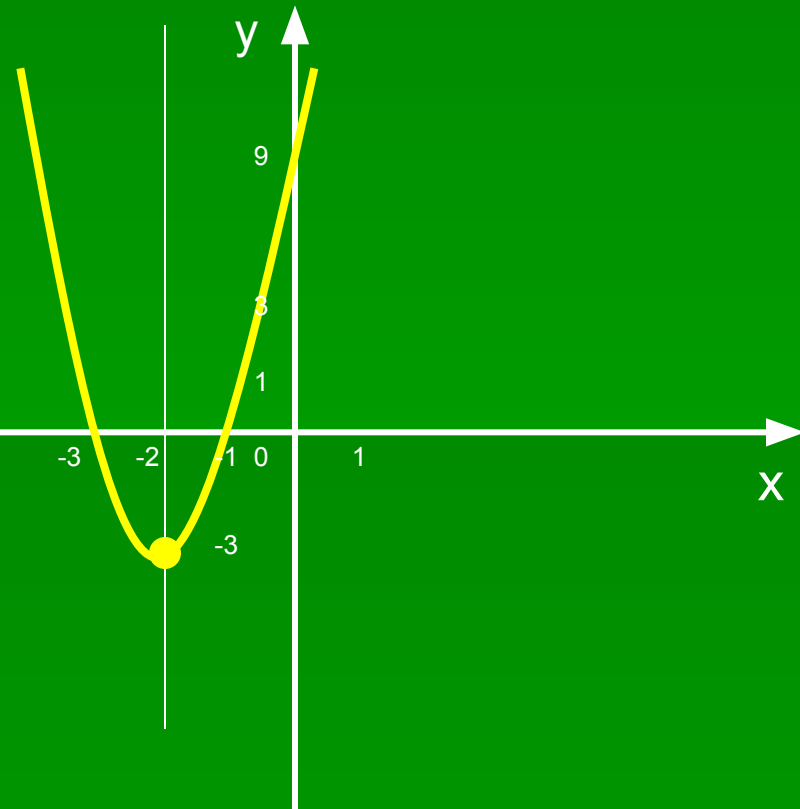
Нули функции: $y=0$

$$3x^2 + 12x + 9 = 0$$

$$x^2 + 4x + 3 = 0$$

$$x_1 = -1, \quad x_2 = -3$$

x	0	-1
y	9	0



Пример №2

$$y = \frac{1}{4}x^2 + 2x - 5$$

Графиком функции является парабола, ветви параболы направлены вверх, т.к. $a = \frac{1}{4}$, $a > 0$.

$M(x_0; y_0)$ - вершина параболы

$$x_0 = \frac{-b}{2a}; \quad x_0 = -2 : \frac{1}{2} = -4$$

$$y_0 = \frac{1}{4}(-4)^2 + 2(-4) - 5 = -9. \quad M(-4; -9)$$

Прямая $x = -4$ – ось симметрии

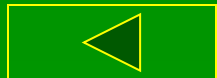
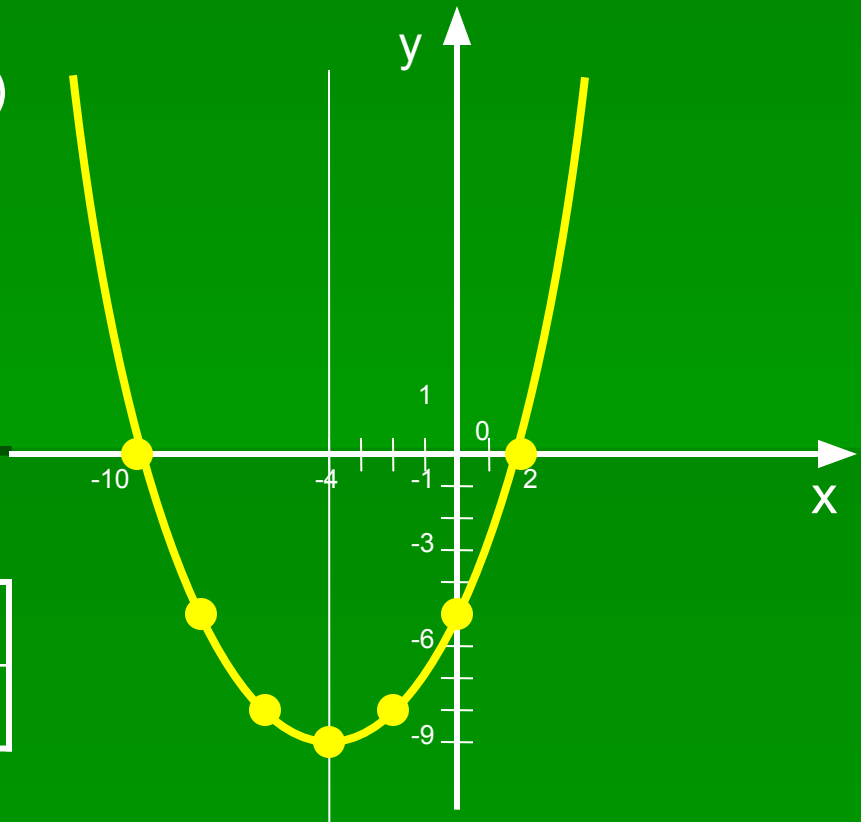
Нули функции: $y=0$

$$\frac{1}{4}x^2 + 2x - 5 = 0$$

$$x^2 + 8x - 20 = 0$$

$$x_1 = -10, \quad x_2 = 2$$

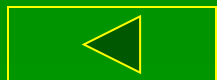
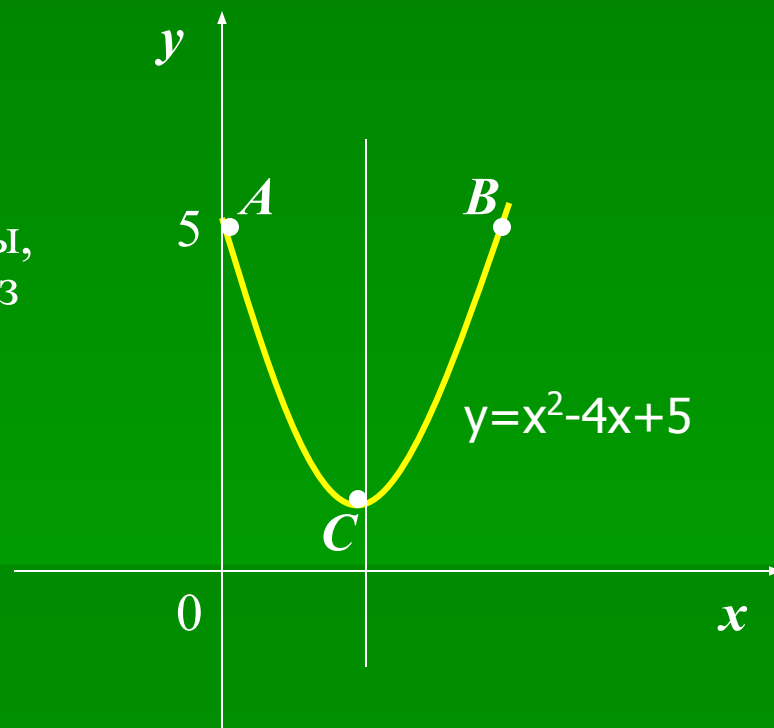
x	0	-2
y	-5	-8



Пример №3

Построим график функции $y = x^2 - 4x + 5$.

- 1) Найдём точки графика, имеющие ординату, равную 5. Для этого решаем уравнение $x^2 - 4x + 5 = 5$. Получаем: $x_1 = 0, x_2 = 4$
- 2) Точки $A(0; 5)$ и $B(4; 5)$ лежат на параболе и имеют одинаковую ординату. Эти точки симметричны относительно оси симметрии параболы, поэтому ось симметрии проходит через середину отрезка AB . Т.к. абсцисса точки A равна 0, а т. B равна четырём, то уравнение оси параболы $x = 2$.
- 3) Подставим значение x в уравнение. Получаем координаты вершины параболы: $x_0 = 2, y_0 = 1$.
- 4) Отмечаем на координатной плоскости т. $C(2; 1)$, построим параболу, проходящую через три точки A, B, C .



Пример №4

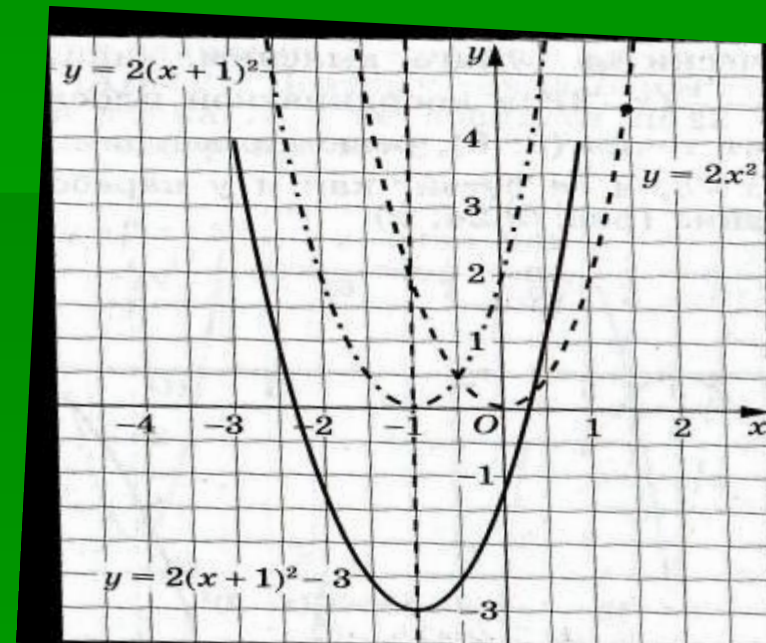
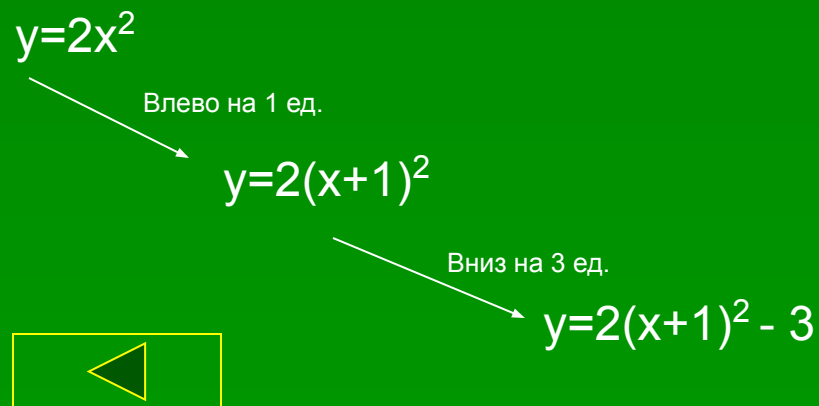
Построим график функции $y=2(x+1)^2-3$.

Будем действовать следующим образом:

1) Построим параболу $y=2x^2$;

2) Перенесем ее на 1 единицу влево и на 3 единицы вниз – в результате получится график заданной функции $y=2(x+1)^2-3$ (см.рис)

Действия, которые мы выполнили для построения графика, можно описать такой схемой:



Пример №5

$$y = -2(x+3)^2 + 2$$

$$m = -3$$

$$n = 2$$

$$y = -2x^2$$

x	1	-1	2
y	-2	-2	-8

$$y = -2(x+3)^2 + 2$$

