

# ДЕЛЕНИЕ ВО МНОЖЕСТВЕ МНОГОЧЛЕНОВ



# ЧТО ТАКОЕ МНОГОЧЛЕН?

Многочленом с переменной  $x$  (или от переменной  $x$ ), называют сумму степеней переменной  $x$  с натуральным показателем, с некоторыми коэффициентами, то есть:

$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ , где  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$  – некоторые числа, причем  $a_0 \neq 0$ ,  $n$  – натуральное число.  $P_n(x)$  – обозначение многочлена степень которого равна  $n$ .

Многочлен  $P(x)$  делится на  
многочлен  $Q(x) \neq 0$ , если  $P$   
 $(x) = Q(x) \cdot M(x)$ ,  
где  $M(x)$  – некоторый  
многочлен.

# Свойства делимости многочленов «столбиком»:



# 1 СВОЙСТВО:

Если многочлен  $P_n(x)$  делится на многочлен  $Q_k(x)$ , а многочлен  $Q_k(x)$  делится на многочлен  $M_m(x)$ , то многочлен  $P_n(x)$  делится на многочлен  $M_m(x)$ .



## 2 СВОЙСТВО:

Если многочлены  $P_n(x)$  и  $Q_n(x)$  делятся на многочлен  $M_k(x)$ , то многочлены  $P_n(x)+Q_n(x)$  и  $P_n(x)-Q_n(x)$  делятся на многочлен  $M_k(x)$ , а многочлен  $P_n(x) \cdot Q_n(x)$  делится на многочлен  $M_k^2(x)$ .

## 3 СВОЙСТВО:

Если  $P(x)$  делится на  $Q(x)$ , то всякий корень  $Q(x)$  является корнем  $P(x)$ . Действительно если  $P(x) = Q(x) \cdot M(x)$  и  $Q(c) = 0$ , то  $P(c) = Q(c) \cdot M(c) = 0$ .

# Алгоритм деления многочленов

## «СТОЛБИКОМ»

1. Расположить делимое и делитель в убывающих степенях  $x$ ;
2. Разделить старший член делимого на старший член делителя; затем полученный одночлен сделать первым членом частного;
3. Первый член частного умножить на делитель, результат вычесть из делимого; полученная в результате разница является первым остатком;
4. Чтобы получить следующий член частного, нужно с первым остатком поступить так, как поступали с делимым и делителем в пунктах 2 и 3.
5. Это следует продолжать до тех пор, пока не будет получен остаток, равный нулю или остаток, степень которого меньше степени делителя.



Разделить уголком многочлен

$P(x)=10x^2-7x-12$  на  
многочлен  $Q(x)=5x+4$ .

Решение.

делимое	$10x^2-7x-12$		$5x+4$	делитель
	$10x^2+8x$		$2x-3$	частное

первый остаток  $-15x-12$

---

$-15x-12$

0 остаток

Ответ:  $2x-3$ .

Разделить многочлен  $P(x)=3x^4+2x^2-1$  на  
многочлен  $Q(x)=x^2+x$ .

Решение.

$$\begin{array}{r|l} \underline{3x^4 + 2x^2 - 1} & x^2 + x \\ \underline{3x^4 + 3x^2} & 3x^2 - 3x + 5 \\ -3x^3 + 2x^2 - 1 & \\ \underline{-3x^3 - 3x^2} & \\ \underline{\quad 5x^2 - 1} & \\ \underline{\quad 5x^2 + 5x} & \\ \quad \quad \quad - 5x - 1 & \end{array}$$

Ответ: частное  $3x^2-3x+5$ , остаток  $-5x-1$ .

# Задача

При каких натуральных значениях  $n$  выражение  $\frac{2n^2 - 11n + 13}{n - 3}$  является целым числом?

Решение.

Разделим числитель дроби на знаменатель с остатком:

$$\begin{array}{r|l} 2n^2 - 11n + 13 & n - 3 \\ 2n^2 - 6n & 2n - 5 \\ \hline -5n + 13 & \\ -5n + 15 & \\ \hline -2 & \end{array}$$

Таким образом, исходное выражение равно  $2n - 5 - \frac{2}{n - 3}$ , что

является целым числом тогда и только тогда, когда 2 нацело делится на  $n - 3$ . Поскольку целыми делителями числа 2 являются числа -2, -1, 1, 2 и только они, получаем  $n = 1, 2, 4, 5$ .

Ответ:  $n = 1, 2, 4, 5$ .

Степень частного равна  
разности степеней делимого и  
делителя, а степень остатка  
всегда меньше степени  
делителя.



Алгоритм  
вычислений  
по схеме  
Горнера:





1 шаг. Под первым коэффициентом делимого  $a_0$  пишется ещё раз этот коэффициент.

2 шаг. Под коэффициентом  $a_1$  пишется число  $b_1 = a_0 b + a_1$ .

3 шаг. Под коэффициентом  $a_2$  пишется  
число  $b_2 = b_1 b + a_2$ .

4 шаг. Под коэффициентом  $a_3$  пишется  
число  $b_3 = b_2 b + a_3$ ;  $b_3 = R$  - остаток.

Для любого многочлена

$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$  и  
любого числа  $c$  можно написать  
разложение  $P(x)$  по степеням  
разности  $x-c$ :

$$P(x) = b_0(x-c)^n + b_1(x-c)^{n-1} + \dots + b_{n-1}(x-c) + b_n.$$

Разложить многочлен  $P(x)=x^4-5x^3-3x^2+9$  по  
степеням разности  $x-3$ .

Решение.

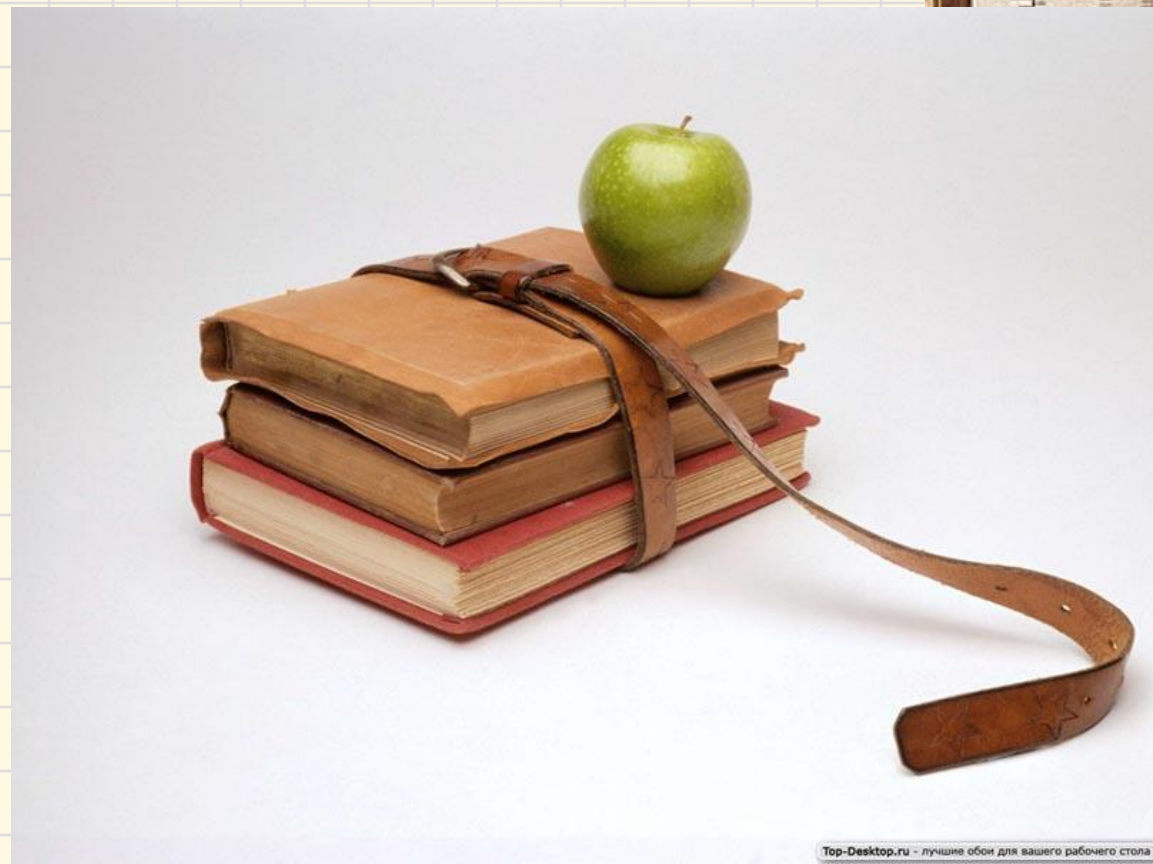
Выполним деление по схеме Горнера:

	1	-5	-3	0	9
3	1	-2	-9	-27	-72
	1	1	-6	-45	
	1	4	6		
	1	7			
	1				

Таким образом,

$$P(x)=(x-3)^4+7(x-3)^3+6(x-3)^2-45(x-3)-72.$$

# Теорема Безу





# Определение.

Остаток от деления многочлена  $P(x)$  на двучлен  $x-a$  равен значению этого многочлена при  $x=a$ :  $P(a)=R$ .

Следствие №1. Если  $x=a$  – корень уравнения  $P_n(x)=0$ , то  $R=0$  и многочлен  $P_n(x)$  делится нацело на двучлен  $x-a$ .

Следствие №2. Если многочлен  $P_n(x)$  делится нацело на двучлен  $x-a$ , то  $x=a$  – корень уравнения  $P_n(x)=0$ .

# Задача

Выяснить, делится ли нацело  
многочлен  $P(x)=x^{100}+3x^{79}+x^{48}-x^{27}$  на  
 $x+1$ .

Решение.

Остаток от деления  $P(x)$  на  $x+1$  равен

$$\begin{aligned} P(-1) &= (-1)^{100} + 3 \cdot (-1)^{79} + (-1)^{48} - (-1)^{27} \\ &= 1 - 3 + 1 + 1 = 0. \end{aligned}$$

Ответ: многочлен  $P(x)$  нацело  
делится на  $x+1$

# Список используемой литературы

- Гусев В.А., Мордкович А.Г. Мат.: Справочные материалы: Кн. для учащихся. – М.: Просвещение, 1988 – 416с.:ил.
- Дорофеев Г.Д. «Многочлены с одной переменной». / Журнал математика для школьников. – 2005год. – №3
- Колягин Ю. «Многочлены и уравнения высших степеней». / Учебно-методическая газета «Математика» – 2005год – №2
- Алгебра и начала анализа: Учебник для 10 класса общеобразовательных учреждений / С.М.Никольских, М.К. Потапов, Н.Н.Решетников, А.В.Шевпин. – М.: Просвещение, 2006год
- Факультативный курс по математике: Учебное пособие для 7-9класс средней школы / Составитель И.Л.Никольская. – М.: Просвещение, 1991год
- Энциклопедический словарь юного математика: сост. Савин А.П. – М.: Педагогика, 1985 – 352с.:ил.