квадратные уравнения

Виды квадратных уравнений
и способы решения

гипотеза

Каждый человек, особенно если он ученик 8 класса, может решить квадратное уравнение, если знает ответы на вопросы…

вопросы…

- *Определение квадратного уравнения*
- *Виды квадратных уравнений*
- *Решение квадратных уравнений*

Квадратные уравнения **- это фундамент, на котором покоится величественное здание алгебры. Квадратные уравнения находят широкое применение при решении тригонометрических, показательных, логарифмических, иррациональных и трансцендентных уравнений и неравенств.**

В школьном курсе математики изучают формулы корней квадратных уравнений, с помощью которых можно решать любые квадратные уравнения. Однако имеются и другие способы решения квадратных уравнений, которые позволяют очень быстро и рационально решать многие уравнения. Разберём некоторые из них.

Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где x -переменная, a, b, c - некоторые числа, $a \neq 0$, называется квадратным уравнением.

Примеры:

$$5x^2 - 14x + 17 = 0; 3x^2 + 5x = 0; 3x^2 - 5\frac{1}{3} = 0.$$

Виды квадратных уравнений

Полные квадратные уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

$$a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0,$$

$$x^2 + px + q = 0$$

приведенное
квадратное уравнение

Неполные квадратные уравнения

$$ax^2 + bx = 0,$$

$$ax^2 = 0,$$

$$ax^2 + c = 0.$$

Решение неполных квадратных уравнений

$$ax^2 = -c,$$

$$x^2 = -\frac{c}{a},$$

$$x_1 = -\sqrt{-\frac{c}{a}},$$

$$x_2 = \sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

$$4x^2 - 64 = 0,$$

$$4x^2 = 64,$$

$$x^2 = 64 \div 4,$$

$$x^2 = 16,$$

$$x_1 = -4; x_2 = 4.$$

$$\textit{Ответ}: -4; 4.$$

$$ax^2=0,$$

$$x^2=0,$$

$$x=-\frac{b}{a}.$$

$$3x^2=0,$$

$$x^2=0,$$

$$x=0$$

$$Ответ: x=0.$$

$$ax^2+bx=0,$$

$$x(ax+b)=0,$$

$$x=0; ax+b=0,$$

$$x_1=0; x_2=-\frac{b}{a}.$$

$$3x^2+6x=8x^2-14x,$$

$$-5x^2+20x=0,$$

$$-x(5x-20)=0,$$

$$-x=0; 5x-20=0.$$

$$x_1=0; x_2=4$$

$$Ответ: x_1=0, x_2=4.$$

Способы решения квадратных уравнений

- Разложение левой части на множители;
- Метод выделения полного квадрата;
- Применение формул корней квадратного уравнения;
- Применение теоремы Виета;
- Введение новой переменной;
- По сумме коэффициентов квадратного уравнения;
- Графический.

Разложение левой части на множители

$$8x^2+10x+3=0,$$

$$8x^2+4x+6x+3=0,$$

$$4x(2x+1)+3(2x+1)=0,$$

$$(2x+1)(4x+3)=0,$$

$$2x+1=0;4x+3=0,$$

$$x_1=-\frac{1}{2};x_2=-\frac{3}{4}$$

$$Ответ: x_1=-\frac{1}{2};x_2=-\frac{3}{4}.$$

Метод выделения полного квадрата

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

$$x^2-10x+16=0,$$

$$x^2-2*5x+25-25+16=0,$$

$$(x-5)^2-9=0,$$

$$(x-5)^2=9,$$

$$x-5=-3; x-5=3,$$

$$x_1=2; x_2=8$$

$$\text{Ответ}: x_1=2; x_2=8.$$

$$5x^2-7x-6=0,$$

$$5\left(x^2-\frac{7}{5}x-\frac{6}{5}\right)=0,$$

$$x^2-2*\frac{7}{10}x-\left(\frac{7}{10}\right)^2-\left(\frac{7}{10}\right)^2-\frac{6}{5}=0,$$

$$\left(x-\frac{7}{10}\right)^2-\frac{169}{100}=0,$$

$$x-\frac{7}{10}=-\frac{13}{10}; x-\frac{7}{10}=\frac{13}{10},$$

$$x_1=-\frac{3}{5}; x_2=2$$

$$\text{Ответ}: x_1=-\frac{3}{5}; x_2=2.$$

Исполязование формул корней квадратного уравнения

$$ax^2+bx+c=0, a\neq 0,$$

$$D=b^2-4ac,$$

$1.D=0$ – *один корень*,

$2.D>0$ – два корня,

$3.D<0$ – нет действительных корней.

b – *нечетное*

$$D=b^2-4ac$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}.$$

b – *четное*, $b=2k$

$$D=k^2-ac$$

$$x_{1,2}=\frac{-k\pm\sqrt{D}}{a}.$$

примеры

$$2x^2 + 3x - 5 = 0,$$

$b = 3$ – не четное число,

$$D = 3^2 - 4 * 2 * (-5) =$$

$$= 9 + 40 = 49, D > 0;$$

$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{49}}{2 * 2} = \frac{-3 - 7}{4} = -\frac{5}{2},$$

$$x_2 = \frac{-3 + \sqrt{49}}{2 * 2} = \frac{-3 + 7}{4} = 1.$$

$$Ответ: x_1 = -2\frac{1}{2}; x_2 = 1.$$

$$x^2 - 4x - 5 = 0,$$

$b = 4$ – четное число,

$$b = 2 * 2, k = 2,$$

$$D = 2^2 + 5 = 9,$$

$$D > 0,$$

$$x_1 = 2 - \sqrt{9} = -1,$$

$$x_2 = 2 + \sqrt{9} = 5.$$

$$Ответ: x_1 = -1; x_2 = 5.$$

Применение теоремы Виета

$$x^2+px+q=0,$$

Если x_1, x_2 – корни уравнения,

тогда

$$x_1+x_2=-p,$$

$$x_1x_2=q.$$

$$ax^2+bx+c=0,$$

Если x_1, x_2 – корни уравнения,

тогда

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},$$

$$x_1x_2=\frac{c}{a}.$$

Введение новой переменной

$$ax^2+bx+c=0, a\neq 0.$$

Умножим обе части уравнения на ***a***

$$a^2x^2+abx+ac=0,$$

Пусть $ax=y,$ тогда $y^2+by+c=0.$

Корни уравнения найдем по теореме, обратной теореме Виета или по сумме коэффициентов уравнения

$$ax_1=y_1, \qquad ax_2=y_2$$

$$x_1=\frac{y_1}{a}, \qquad x_2=\frac{y_2}{a}.$$

По сумме коэффициентов квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0.$$

1. Если $a + b + c = 0,$

то $x_1 = 1, x_2 = \frac{c}{a}.$

2. Если $a - b + c = 0,$

то $x_1 = -1, x_2 = -\frac{c}{a}.$

$$5x^2 - 7x + 2 = 0,$$

$$т.к.\, 5 - 7 + 2 = 0,$$

$$то\; x_1 = -1, x_2 = \frac{2}{5}.$$

$$Ответ: x_1 = -1, x_2 = \frac{2}{5}.$$

Графический способ

$$ax^2+bx+c=0, a\neq 0,$$

$$ax^2=-bx-c.$$

$y=ax^2$ - Графиком функции является парабола

$y=-bx-c$ - Графиком функции является прямая

- Прямая и парабола имеют только одну общую точку, значит уравнение имеет одно решение;
- Прямая и парабола имеют две общие точки, абсциссы этих точек являются корнями квадратного уравнения;
- Прямая и парабола не имеют общих точек, значит уравнение не имеет корней.

$$x^2 - x - 6 = 0$$

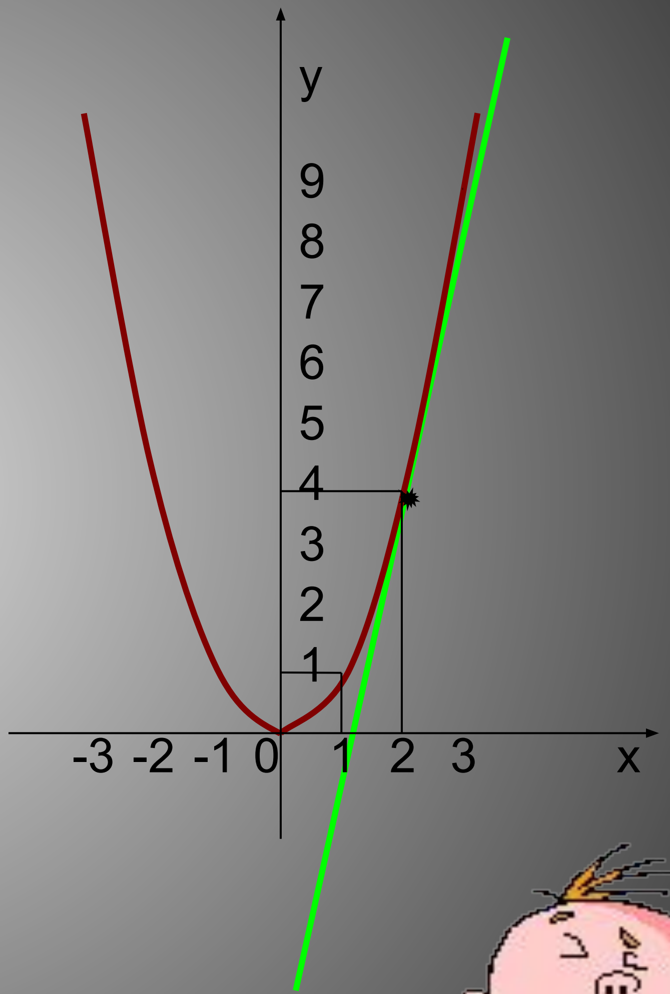
$$x^2 = x + 6$$

Прямая и парабола имеют две общие точки с координатами (-2;4) и (3;9).

Ответ:-2 и 3.

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$x^2 = 4x - 4$$



Прямая и парабола имеют одну общую точку с координатами (2;4).

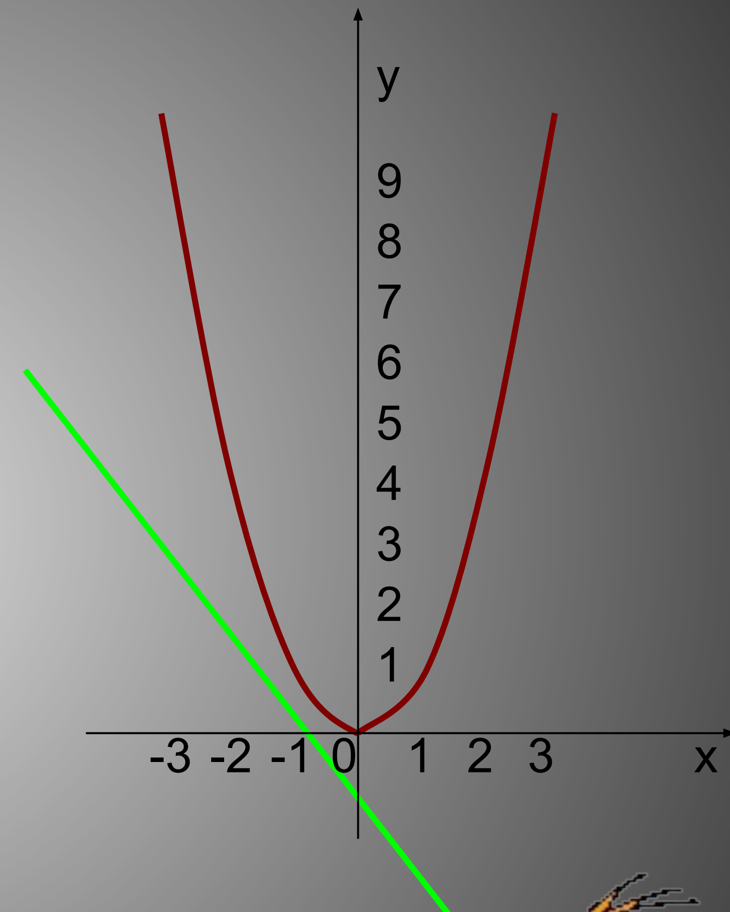
Ответ: 2.

$$x^2+2x+3=0$$

$$x^2=-2x-3$$

Прямая и парабола не имеют общих точек, значит уравнение не имеет действительных корней.

Ответ: нет корней.



Вывод

У нас хорошие знания, поэтому мы можем решить любое квадратное уравнение. Мы знаем разные способы решения и можем их применять на практике. Учитесь и вам все будет по силам! Хорошие знания это билет в светлое будущее!

Полезные ресурсы

- Алгебра: Учебник для 8 класса, общеобразоват. учреждений/ *Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров и др.,* 2006
- Газета «Математика», 2001
- *Бощенко О.В.* «Математика» 5-9 классы