Теория вероятностей и статистика
9 класс

Глава 12. Числовые характеристики случайных величин

Результаты обучения. В результате изучения материала главы 12 учащийся должен:

- знать определение математического ожидания конечной случайной величины, понимать, что математическое ожидание является обобщением среднего арифметического значений величины;
- знать свойства математического ожидания и уметь использовать их при решении простых задач;
- знать, что важным свойством распределения случайной величины является рассеивание величины, уметь вычислять дисперсию и стандартное отклонение;
- знать формулы математического ожидания и дисперсии числа успехов в серии испытаний Бернулли.

П.53. Математическое ожидание случайной величины.

Для введения понятия «математическое ожидание случайной величины» необходимо разобрать задачу п.53.

Для проведения лотереи изготовили 100 билетов. Из них 1 билет с выигрышем в 500 р., 10 билетов с выигрышем по 100 р. и остальные 89 билетов без выигрыша. Какой средний выигрыш соответствует 1 билету?

Выигрыш является случайной величиной X, которая может принимать значение 0;100; 500, с вероятностью 0,89; 0,1 и 0,01.

Если покупатель приобретает все 100 билетов, то выигрыш составит 1500 руб, следовательно выигрыш, соответствующий одному билету в 100 раз меньше. 15 руб. $(0\cdot89+10\cdot100+1\cdot500):100 = 0\cdot0{,}89+100\cdot0{,}1+500\cdot0{,}01=15$.

15 руб – это среднее значение случайной величины. Оно называется математическим ожиданием случайной величины.

Значения	0	100	500	
Вероятность	0,89	0,1	0,01	

- Рассмотрим случайную величину X. Пусть распределение случайной величины X задано таблицей.

Значение величины X	x_1	x_2	x_3	…	x_n
Вероятность	p_1	p_2	p_3	…	p_n

Обозначим математическое ожидание E(X).

Определение. Математическим ожиданием случайной величины X называют число

$$E(X)=x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+\ ...\ +x_np_n$$

$E(a)=a\cdot 1$. Математическое ожидание постоянной величины равняется этой величине.

Задачи № 1. а),б),в).№2 решаются по формуле.

№3.

Значение Z	-8	-6	-4	-2	2	4	6	8
Вероятность	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8

$E(Z) = (-8-6-4-2+2+4+6+8)\cdot 1/8=0.$

№4.X- «число выпавших орлов»

Значение X	0	1
Вероятность	0,5	0,5

$E(X)= 0\cdot 0{,}5+1\cdot 0{,}5=0{,}5$

№5. Y – «сумма очков, выпавших при двух бросаниях игральной кости»

Значение Y	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Вероятность	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$E(Y)=2\cdot 1/36+3\cdot 2/36+4\cdot 3/36+5\cdot 4/36+6\cdot 5/36+7\cdot 6/36+8\cdot 5/36+$
$9\cdot 4/36+10\cdot 3/36+11\cdot 2/36+12\cdot 1/36=7.$

Вернуться к этой задаче в п.54, при использовании свойств.

- Задача № 9.

X – «число клеток в подбитом корабле»

Значение X	0	1	2	3	4
Вероятность	0,8	0,04	0,06	0,06	0,04

$E(X)=0\cdot 0{,}8+1\cdot 0{,}04+2\cdot 0{,}06+3\cdot 0{,}06+4\cdot 0{,}04=0{,}5.$

$$E(X)=0{,}5.$$

Задача № 10.

а). X – «наибольшее из двух выпавших очков»

Значение X	1	2	3	4	5	6
Количество	1	3	5	7	9	11
Вероятность	1/36	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36

$$\mathring{A}(\tilde{O}) = 1\cdot\frac{1}{36} + 2\cdot\frac{3}{36} + 3\cdot\frac{5}{36} + 4\cdot\frac{7}{36} + 5\cdot\frac{9}{36} + 6\cdot\frac{11}{36} = 4\frac{17}{36}$$

№10 (б). Х – «наименьшее из двух выпавших очков»

Значение	1	2	3	4	5	6
Количество	11	9	7	5	3	1
Вероятность	11/36	9/36	7/36	5/36	3/36	1/36

$$\mathring{A}(\tilde{O}) = 1\cdot\frac{11}{36} + 2\cdot\frac{9}{36} + 3\cdot\frac{7}{36} + 4\cdot\frac{5}{36} + 5\cdot\frac{3}{36} + 6\cdot\frac{1}{36} = 2\frac{19}{36}$$

П. 54. Свойства математического ожидания

Свойство1.Пусть X – случайная величина, a – некоторое число. Рассмотрим случайную величину $Y=aX$. Тогда $E(Y)=aE(X)$.

Свойство 2. Пусть U и V – две случайные величины. Тогда U + V – также случайная величина, и при этом $E(U+V) = E(U)+E(V)$.

Это значит, что математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме их математических ожиданий.

Задача № 1.

X – «число очков, выпавших на одной игральной кости»

$E(X) = 3{,}5$

Тогда при пяти бросаниях математическое ожидание равно а). $3{,}5 \cdot 5 = 17{,}5$

б). $3{,}5 \cdot 7 = 24{,}5$

в). $3{,}5 \cdot 100 = 350$

г). $3{,}5 \cdot k = 3{,}5k$

Задача № 2. Применение свойств.

Задача № 3.

Значение X	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
Вероятность	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p

p=1/11. E(X) = 1/11·(-3-2-1+0+1+2+3+4+5+6+7)=2

Значение Y	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Вероятность	p	p	p	p	p	p	p	p	p

p = 1/9. E(Y)= 1/9·(1+2+3+4+5+6+7+8+9) = 5

а). Z=X+Y, E(Z) = E(X)+E(Y) E(Z)= 2+5 = 7

б). Z=X-Y E(Z) = 2-5 = -3.

Задача № 5.

Т.к. бросаний 5, то всего событий 32.

X – «выпадение орлов»

Значение X	0	1	2	3	4	5
Вероятность	1/32	5/32	10/32	10/32	5/32	1/32

$$E(X)=1/32\cdot(0+1\cdot5+2\cdot10+3\cdot10+4\cdot5+5\cdot1)=80\cdot1/32=2{,}5$$

$$E(X)=2{,}5$$

Задача № 6 разбирается подробно в п.58.

П.56- 57. Дисперсия и стандартное отклонение. Свойства дисперсии.

- Дисперсия - мера рассеивания.(п.55)

  Дисперсией случайной величины X называют математическое ожидание случайной величины

$(X - E(X))^2$.

$$D(X) = E((X - E(X))^2)$$

- Стандартное отклонение $\sigma = \sqrt{D(X)}$
- <u>Свойства дисперсии</u>. 1.Пусть X – случайная величина. Рассмотрим случайную величину

$Y = aX$, где a - некоторое число. Тогда $D(Y) = a^2D(X)$

2. Пусть X – случайная величина . Рассмотрим случайную величину $Y = X + a$. Тогда

$$D(Y) = D(X)$$

- Задача № 2.

Проводится одно испытание Бернулли, с вероятностью успеха p. Случайная величина S – «число успехов». Найти D(S).

$E(S) = p$

Значение S	0	1
Вероятность	1-p	p

$D(X) = E((X - E(X))^2)$

Значение S – E(S)	- p	1-p
Вероятность	1-p	p

$$D(S) = p^2(1- p)+(1- p)^2 p = p(1- p)(p + 1- p) = p(1- p) = p - p^2$$

Задача № 3.

$D(X) = E((X - E(X))^2)$

а). $E(X) = -2 \cdot 0,3 + 0 \cdot 0,5 + 3 \cdot 0,2 = 0$

$(X - E(X))^2$	4	0	9
Вероятность	0,3	0,5	0,2

$D(X) = 4 \cdot 0,3 + 0 \cdot 0,5 + 9 \cdot 0,2 = 1,2 + 1,8 = 3$

б). Аналогично.

Задача №4.б). Вычислить дисперсию случайной величины X. $D(X) = E((X - E(X))^2)$

$E(X) = 3$

Значения X	-2	0	1	5
Вероятность	0,1	0,1	0,2	0,6

Значения X – E(X)	-5	-3	-2	2
Вероятность	0,1	0,1	0,2	0,6

$E((X-E(X))^2) = 25\cdot0{,}1+9\cdot0{,}1+4\cdot0{,}2+4\cdot0{,}6 = 6{,}6$

$D(X) = 6{,}6$

Задачи № 5,6 решаются аналогично.

- Задача № 7.

а). Случайная величина X принимает значения от 0 до 6 с равными вероятностями, т.е. p =1/7.

Найти D(X).

$D(X) = E((X - E(X))^2)$

$E(X)=21\cdot 1/7 =3$

Значения X- E(X) от -3 до 3. Тогда D(X)=4.

б). Случайная величина Y принимает значения от 1 до 7, т.е. Y = X + 1. Следовательно, по свойству дисперсии D(Y) = D(X). Т.е. D(Y) = 4.

- Задача № 8. При решении используются свойства дисперсии.

а). $D(X) = 3$, $Y=3X$, $D(Y)= 9D(X)$, $D(Y)=27$

б). $Y=X+5$. $D(Y)=D(X)$ $D(Y)=3$.

е). $Y=-5X-7$. $D(Y)= 25D(X)=75$.

Остальные решаются аналогично.

П. 58. Математическое ожидание числа успехов в серии испытаний Бернулли

Если S – число успехов в серии n независимых испытаний Бернулли с вероятностью успеха p, то $E(S) = np$.

Задача № 1.

2000 – окуней и 1000 – карасей. Всего 3000 рыб.

Найти ожидаемое число карасей.

$$E(S) = np$$

$$S = \{0;1;\ 2;4;\ \dots;30\} \quad E(S) = 30p$$

$$p = \frac{1000}{3000} = \frac{1}{3}$$

$$E(S) = 10$$

Задача № 3.

n=120

а).S – «число очков кратно 3»

При бросании игральной кости с равной вероятностью 1/6 выпадают 1, 2, 3,4,5,6.

Успехов 2 (значения 3 и 6). Следовательно вероятность события X при однократном бросании равна 1/3.

Т.е. $E(S) = 120 \cdot 1/3 = 40$.

б). Аналогично.

Задача № 4.

Вероятность успеха 0,25. Следовательно E(S)=16·0.25=4. Т.е. ожидаемое число правильных ответов 4.

Задача №5.

Математическое ожидание случайной величины «число выпадений острием вверх» равно 135. n=300. Найти p.

E(S) = np. $p \cdot 300 = 135$,

$$p = 0{,}45$$

П. 59. Дисперсия числа успехов.

Дисперсия числа успехов S в серии испытаний Бернулли вычисляется по формуле $D(S) = npq$.

n – число испытаний Бернулли

p – вероятность успеха

q – вероятность неудачи

Задача № 1.

n = 100   p = 0,36, следовательно q = 0,64.

D(S) = 0,36·0,64·100 = 23,04

$\sigma = \sqrt{D(S)}$ $\sigma = \sqrt{23{,}04} = 4{,}8$

Задача № 2. а). X – «выпавшее число очков кратно 3»

$$p = \frac{1}{3} \quad q = \frac{2}{3} \qquad D(X) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 13500 = 3000$$

D(X) = 3000

Задача № 3.

S – число попаданий серии выстрелов по мишени.

p – вероятность попадания (вероятность успеха)

Найти дисперсию величины S.

а). $D(X) = npq$. p=0,3, тогда вероятность неудачи равна 0,7. число выстрелов равно 100. Тогда дисперсия равна 21.

в). При 2500 выстрелах дисперсия равна 525.

К задаче № 4 даны рекомендации в ответе.