Удивительный многогранник – пирамида!

Цель

Обобщить, расширить и углубить сведения о пирамиде.

Задачи:

- Изучить дополнительные источники и собрать исторический и занимательный материал о пирамиде.
- Рассмотреть теоретический материал по пирамиде, выходящий за рамки школьной программы.
- Научиться применять теоремы при решении задач на пирамиду.
- Изготовить развертки и модели разных пирамид.

Исторические сведения

Пирамида

«пирамис»

«пирамидос»

«пирамус»

(ребра правильной пирамиды)

«пир»

(огонь)

«пирос»

(рожь)

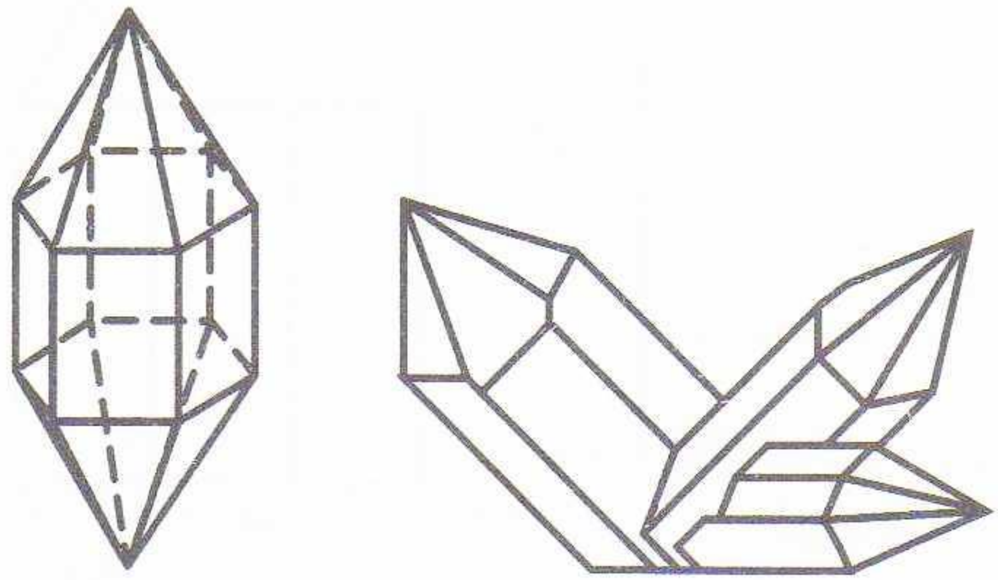
Пирамиды Фараона Хеопса XXVII в до н.э.

Крупнейшая из египетских пирамид, единственная из «Семи чудес света», сохранившееся до наших дней.

Церковь преображения в Кижах

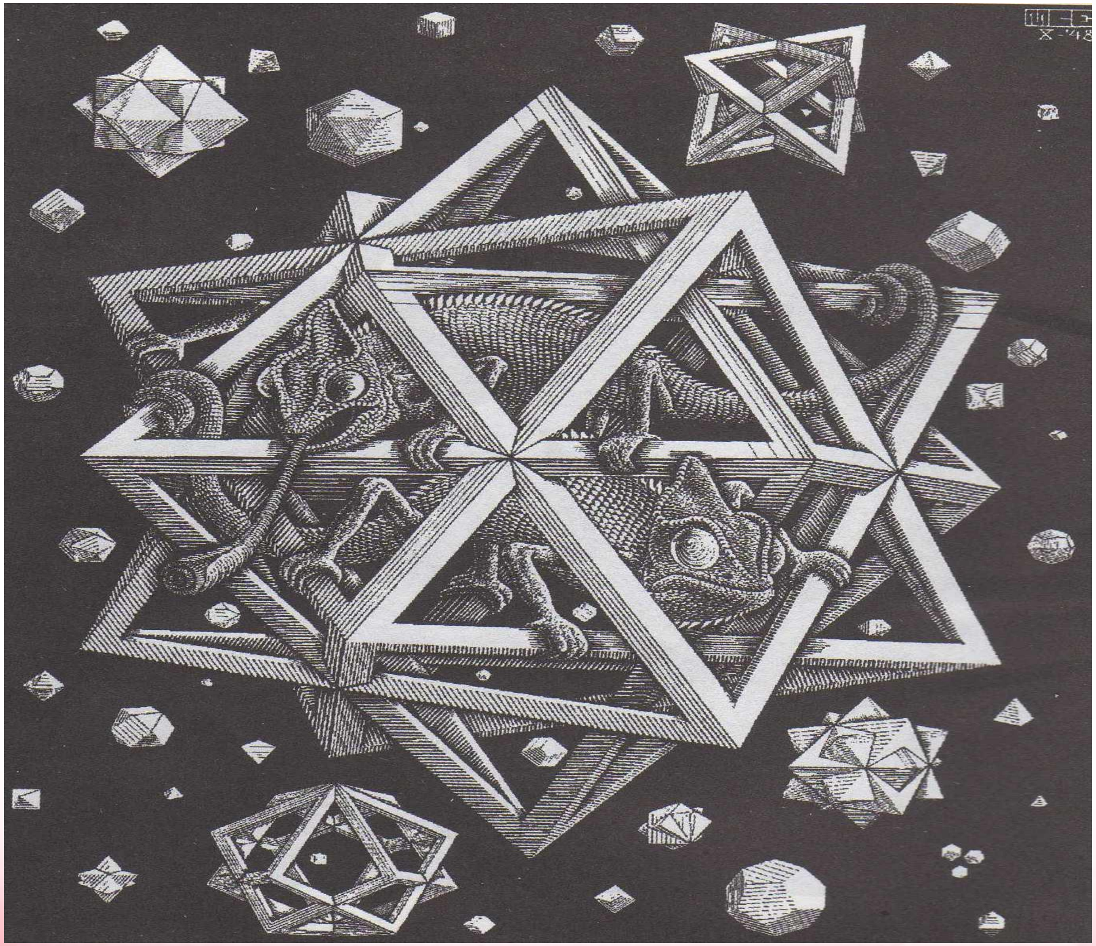
Церковь в Каменском

Пирамида в природе



Кристаллы льда и горного хрусталя (кварца)

Картина М.Эшера, посвященная многогранникам



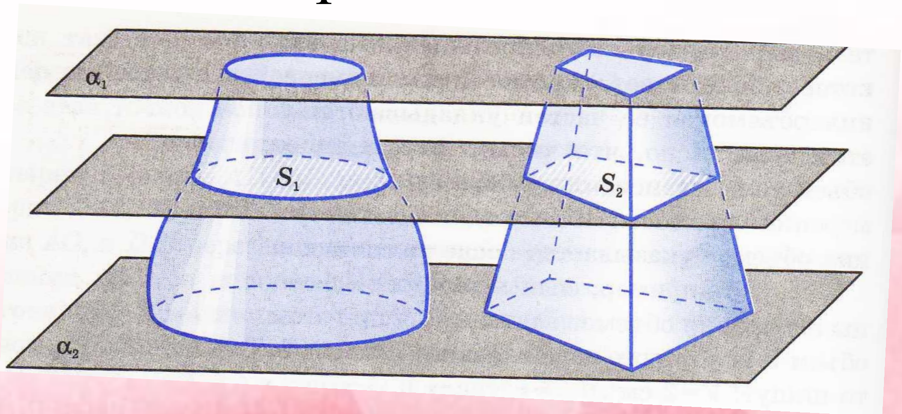
Принцип Кавальери

Принцип:

если при пересечении двух тел плоскостями параллельными одной и той же плоскости, в сечении всегда получаются равновеликие между собой фигуры, то объемы этих тел равны.

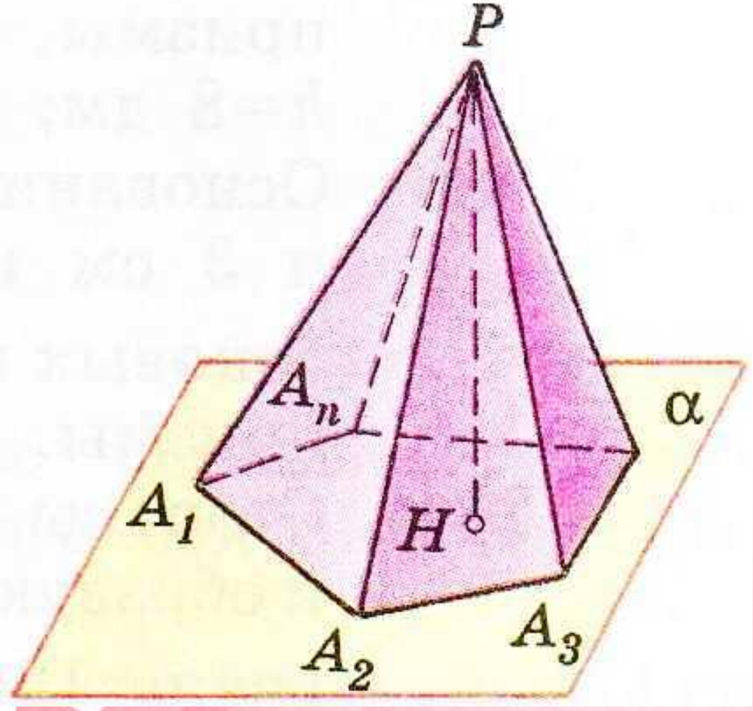
$$S_1 = RS_2$$

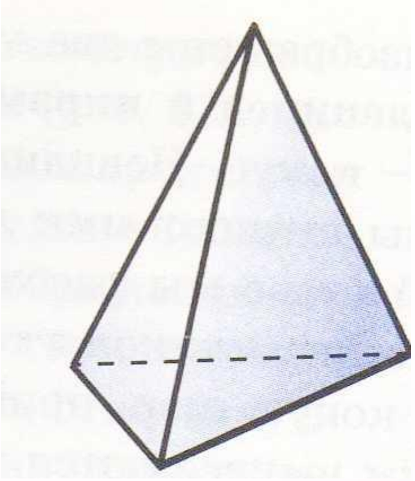
$$V_1 = RV_2$$



Произвольная пирамида

Пирамида – это многогранник, составленный из n-угольника A1,A2…An и n треугольников.





$$S_{пол.} = S_{бок} + S_{осн}$$

Заполним следующую таблицу

Название многогранника	В	Р	Г
Треугольная пирамида	**4**	**6**	**4**
Четырехугольная пирамида	**5**	**8**	**5**
n – угольная пирамида	**n+1**	**2n**	**n+1**

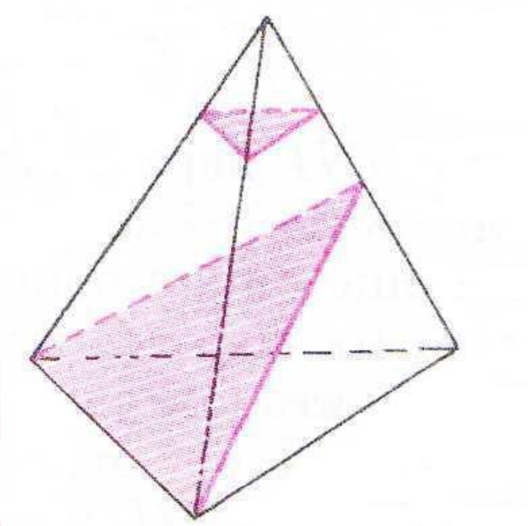
В-Р+Г=2

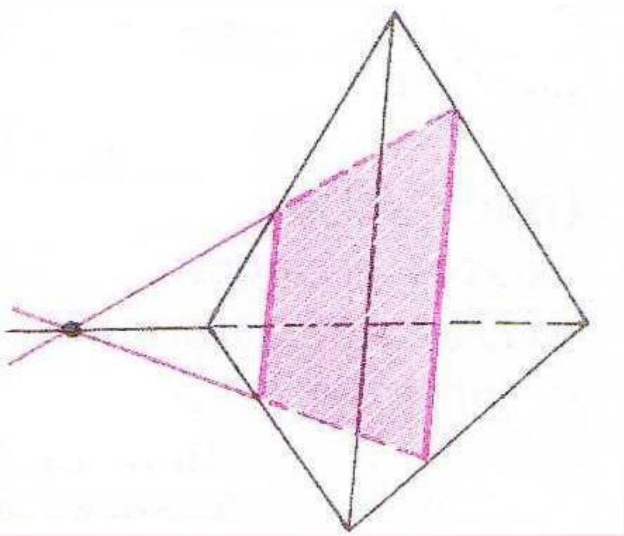
Леонард Эйлер

1752 год – теорема Эйлера

Сечение пирамиды

Сечением пирамиды называется многоугольник, который образуется при пересечении пирамиды с секущей плоскостью.



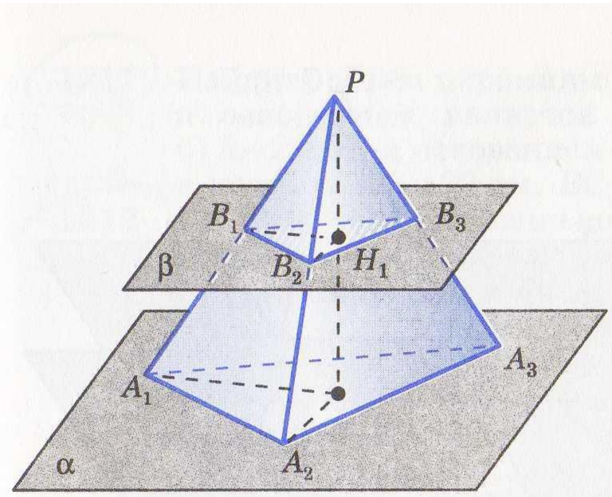


Утверждение

Если пирамида пересечена плоскостью, параллельной основанию, то:

- Сечение – многоугольник, подобный основанию;
- Площадь сечения и основания относятся как квадраты их расстояний от вершины.

Утверждение для треугольной пирамиды



Дано: $PA_1A_2A_3$ – пирамида,

$\beta \parallel A_1A_2A_3$

$B_1B_2B_3$-сечение

S - площадь основания

PH- высота, $H_1 \in PH$

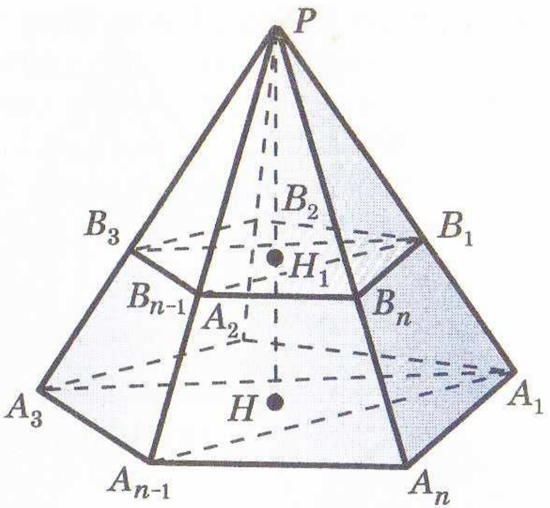
Доказать: B1B2B3 ΔA1A2A3

-коэффициент подобия

$S_{B1B2B3} = \left(\frac{PH}{PH}\right)^2 \times S$

Доказательство:

Утверждение для произвольной пирамиды



б)

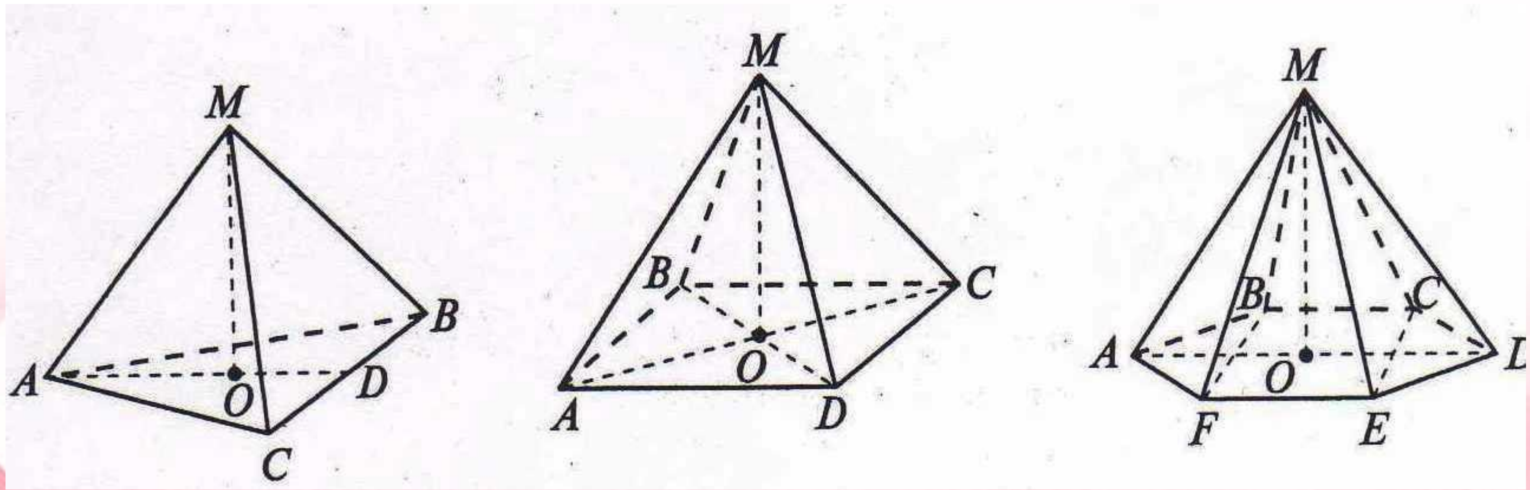
Разобьем пирамиду на треугольные пирамиды с общей высотой PH. Поэтому площадь сечения равна.

$$S_{B1B2B3}+\ldots+S_{B1Bn\text{-}1Bn}= \left(\frac{PH}{PH}\right)^2 \times$$

$$\times(S_{A1A2A3}+\ldots+S_{A1An\text{-}1An}) = \left(\frac{PH}{PH}\right)^2 \times S$$

Правильная пирамида

Пирамида называется правильной, если в основании – правильный многоугольник, а отрезок соединяющий вершину с центром основания является высотой.

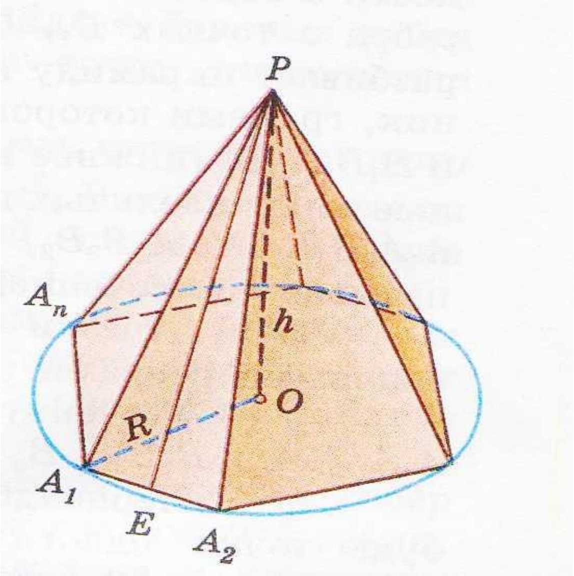


Свойства правильной пирамиды

У правильной пирамиды:

- боковые ребра равны;
- боковые грани являются равными равнобедренными треугольниками;
- апофемы равны;
- площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра основания на апофему.

Свойства правильной пирамиды



Дано: **PA1A2…An – правильная пирамида**

a – сторона основания;

h – апофема

Доказать:

1. **PA1=PA2=…=PAn**

2.**PA1A2=PA2A3=…=PAnA1 – равнобедренные треугольники**

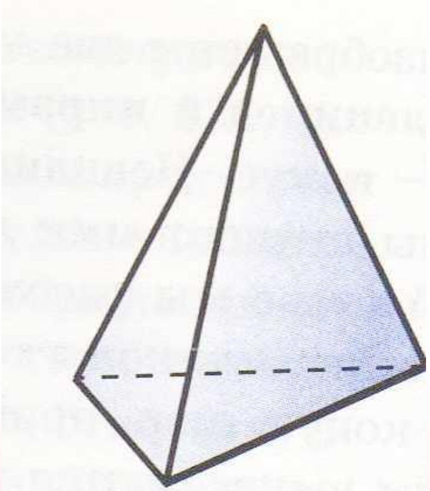
3.**PE1=PE2=…=PEn**

4. **Sбок. =Росн.h**

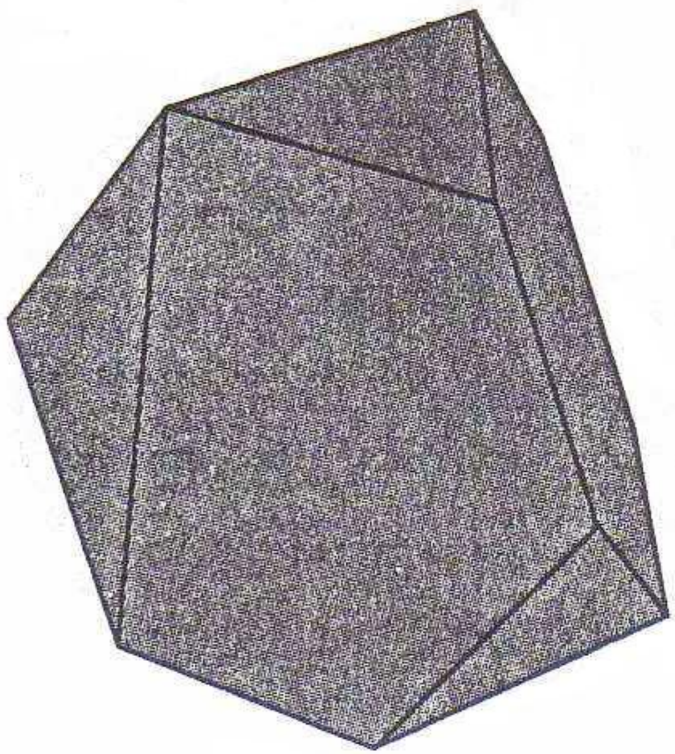
Доказательство:

Правильный тетраэдр

Тетраэдр, гранями которого являются правильные треугольники, называется правильным.



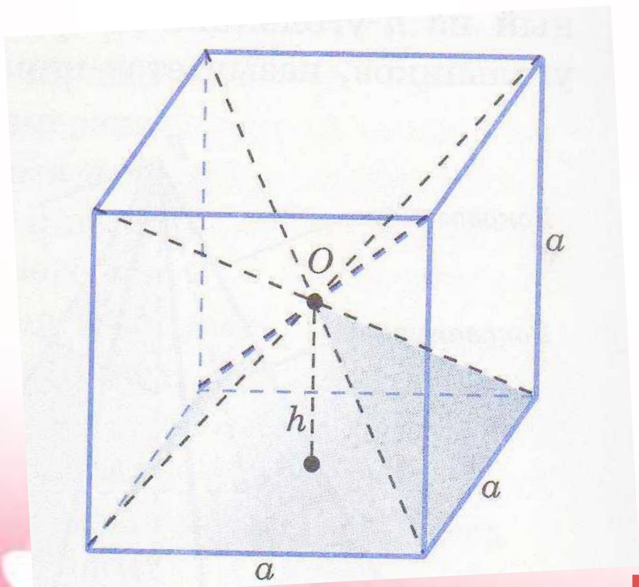
Усеченный тетраэдр



Если срезать углы тетраэдра плоскостями, каждая из которых отсекает третью часть его рёбер, выходящих из одной вершины, то получим усеченный тетраэдр, имеющий восемь граней.

Объем пирамиды

Теорема: Объем правильной четырехугольной пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту.



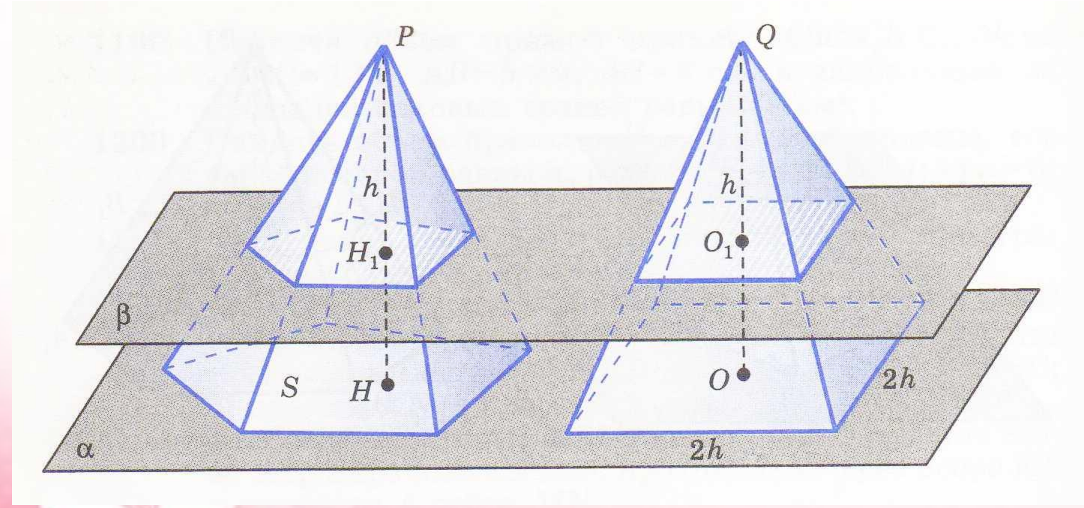
Дано: правильная четырехугольная пирамида,
h – высота,
S – площадь основания
Доказать:

$$V = \frac{1}{3} \times S\,h$$

Доказательство:

Объем пирамиды

Теорема: Объем пирамиды равен одной третьи произведения площади основания на высоту

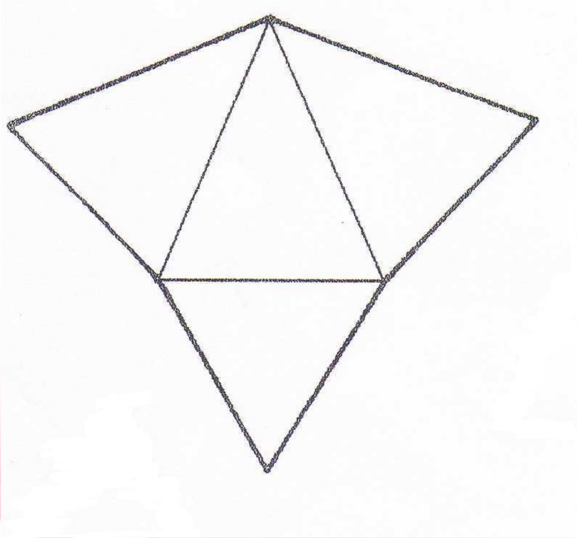


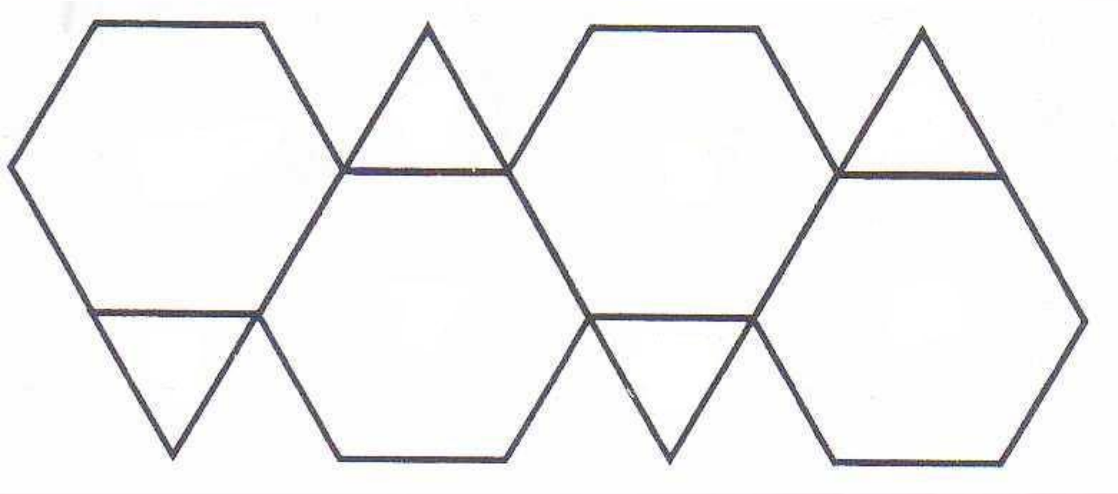
Дано:
пирамида,
S– площадь,
h – высота.
Доказать:
$V= \frac{1}{3} \times S\ h$

Доказательство:

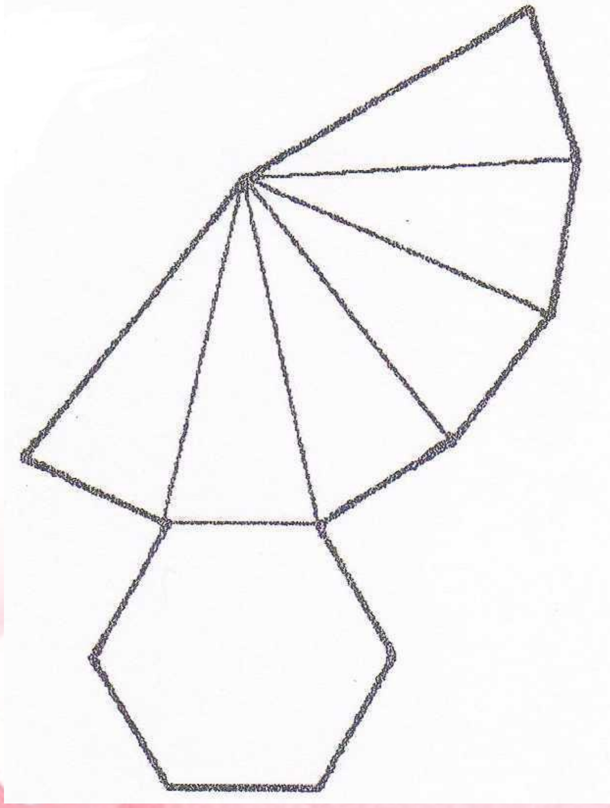
Моделирование пирамид

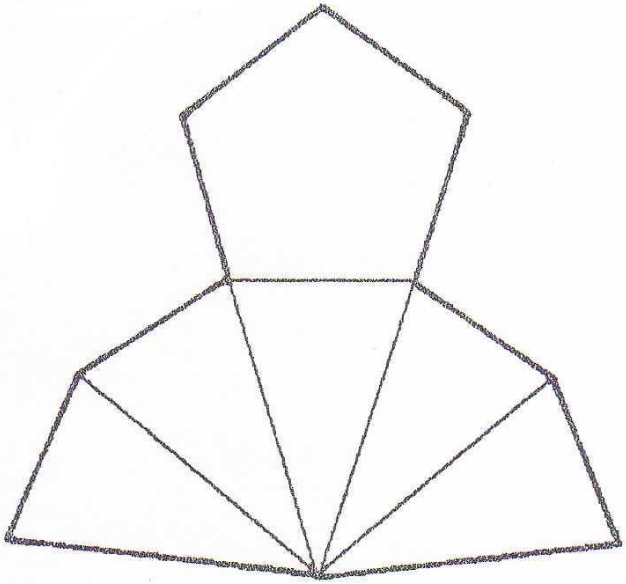
Если поверхность пирамиды разрезать по некоторым ребрам и развернуть её на плоскости так, чтобы все многоугольники, входящие в эту поверхность, лежали в данной плоскости, то полученная фигура на плоскости называется разверткой пирамиды.





Моделирование пирамид





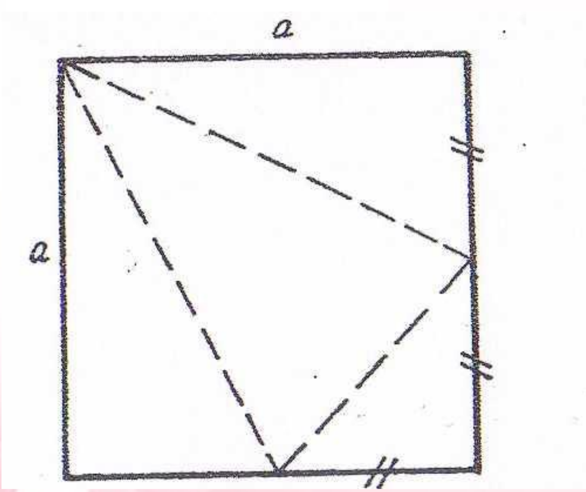
Задача на развертку

Можно ли квадрат «свернуть» в пирамиду, не разрезая его? Если можно, то найдите объем пирамиды при условии, что сторона квадрата равна а.

Задача на развертку

Решение:

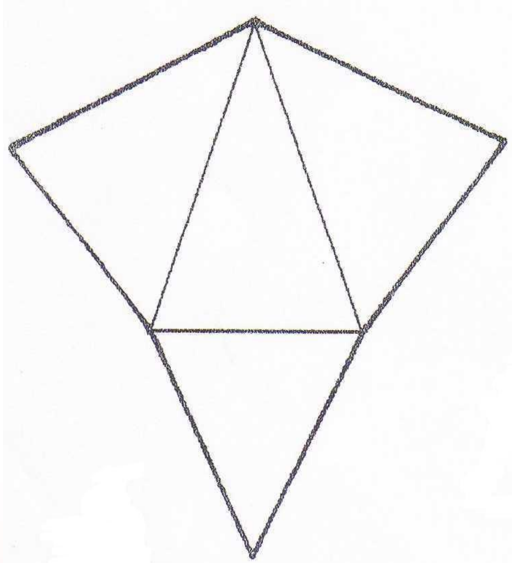
Объем пирамиды проще вычислить, если за основание принять равнобедренный прямоугольный треугольник с катетами а/2. Высотой пирамиды будет боковое ребро, равное а. Объем составит а /24 куб.ед.



$$V = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} \times \frac{a}{2} \times \frac{a}{2}\right) \times a$$

$$V = \frac{a}{24}$$

Задача: Найти площадь развертки правильного тетраэдра с ребром 10 см.



Решение:

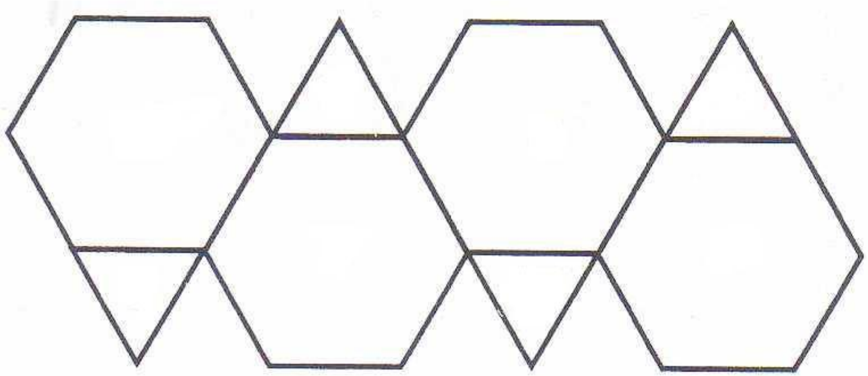
$$n = 3, a = 10$$

$$S_{полн.} = 4 \times \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$$

$$S_{полн.} = 10^2\sqrt{3} = 100\sqrt{3}$$

Задача: Найти площадь развертки усеченного тетраэдра с ребром 3,5 см

Решение:



$$a = 3{,}5 см$$

$$S_{полн.} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \times 4 + \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} \times 4$$

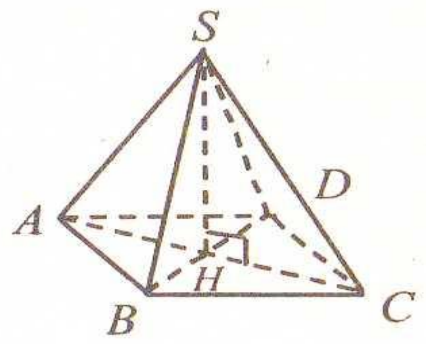
$$S_{полн.} = 3{,}5^2\sqrt{3} + 6 \times 3{,}5^2\sqrt{3}$$

$$S_{полн.} = 85{,}75\sqrt{3}\,(см^2)$$

Задачи

Основанием пирамиды является ромб, сторона которого равна 5 см, а одна из диагоналей равна 8 см. Найдите боковые ребра пирамиды, если её высота проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 7 см.

Задачи



Дано: SH=7, AB=5, DB=8.
Найти: боковые ребра.

Решение:
По теореме Пифагора:

$$AH=\sqrt{AB^2-\left(\frac{DB}{2}\right)^2}=\sqrt{25-16}=3 \text{ см;}$$

$$SA=SC=\sqrt{AH^2+SH^2}=\sqrt{9+49}=\sqrt{58} \text{ см;}$$

$$SB=SD=\sqrt{DH^2+SH^2}=\sqrt{16+49}=\sqrt{65} \text{ см.}$$

Задачи

Найдите объем пирамиды с высотой h, если h = 2 м, а основанием является квадрат со стороной 3 м

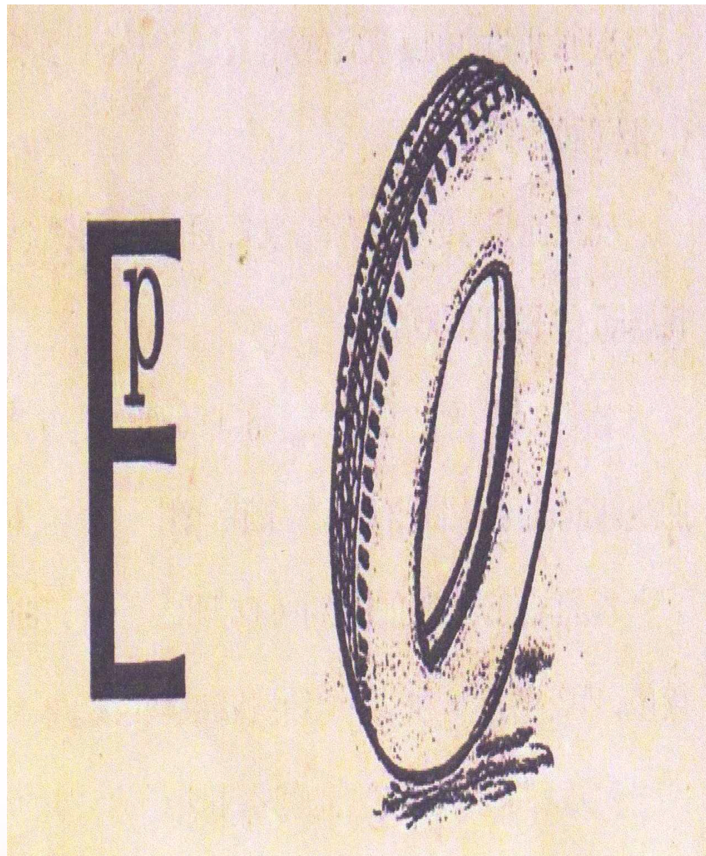
Решение:

Так как $V=\frac{1}{3}S$ осн. $\times h$, а в основании лежит квадрат, то $V=\frac{1}{3}\times 3^2\times 2=6$ $м^3$

Ребусы

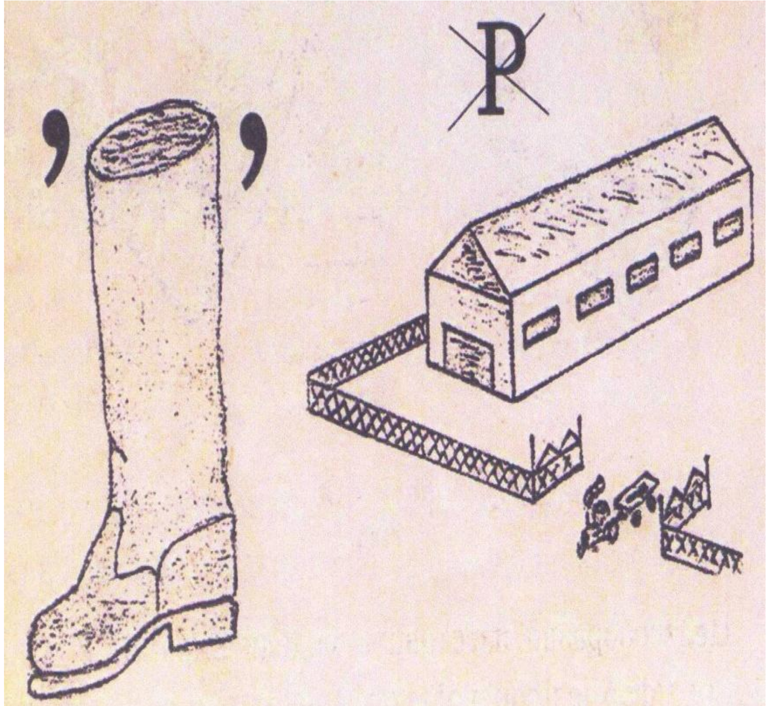
Пирамида

Ребусы



Вершина

Ребусы



Апофема

Стих

О пирамидах

В Древнем Египте жил египтянин,
Был фараон он, а может, крестьянин.
Как-то собрал он свои неликвиды,
Взял и построил из них пирамиды.

Как бы то ни было, но отчего-то
Очень неплохо он с них заработал.
Тот египтянин теперь знаменит:
Гений финансовых он пирамид.

Заключение

На изучение темы «Пирамида» в 9 классе отведен один урок. На уроке я получила начальные сведения о пирамиде. В данной работе я попыталась расширить свои знания. Мною был собран исторический материал о пирамиде и её объеме и занимательный материал: загадки, ребусы, кроссворды.

Заключение

Так же я рассматривала теоретические вопросы, выходящие за рамки школьного курса геометрии 9 класса. Я изготовила развертки и модели различных пирамид, что помогает развитию пространственного воображения. При решении задач по теме «Пирамида» я повторила и обобщила знания по планиметрии. Материал, собранный в данной работе, поможет мне в дальнейшем изучении стереометрии в 10-11 классах.

Литература

- Геометрия, 7-9:Учебник для общеобразовательного учреждений/ Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. – 14-е изд. – М: Просвещение 2004-384с.
- Геометрия, 10-11: Учебник для общеобразовательного учреждений/ Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. – 13-е изд. – М: Просвещение 2004-206с.
- Зив Б.Г. Задачи к урокам геометрии 7-11 класс. – С. – Петербург, 1998 НПО «Мир и семья – 95»- 624с.
- Глейзер Г.И. История математики в школе: IX – X класс Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1983 – 351с.

Литература

- Глейзер Г.И. История математики в школе: VII – VIII класс Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1982 – 240с.
- Игнатьев Е.И. В царстве смекалки / Под редакцией М. К. Потанова – 4-е изд. – М.: Наука 1984, 192с.
- Энциклопедический словарь юного математика, - М.: Педагогика, 1985
- Смирнова И.М. В мире многогранников – М.: Просвещение, 1995
- Веннинджер М. Модели Многогранников – М.Мир, 1974
- Штейнгауз Г. Математический калейдоскоп
- Штейнгауз Г. Сто задач. – М: Наука, 1982

Спасибо за внимание!