Алгебра логики

Алгебра логики — **это математический аппарат, с помощью которого записывают, вычисляют, упрощают и преобразовывают логические высказывания.**

Возникновение логики

Понятие логики как науки появилось ещё в XIX в., т.е. задолго до появления науки информатики и компьютеров.

Элементы математической логики можно найти уже в работах древнегреческих философов. В XVII в. Г. В. Лейбниц высказал идею о том, что рассуждения могут быть сведены к механическому выполнению определенных действий по установленным правилам.

Однако как самостоятельный раздел математики логика начала формироваться только с середины XIX в..

Употребляемые в обычной речи слова и словосочетания *"не", "и", "или", "если... , то", "тогда и только тогда"* и другие позволяют из уже заданных высказываний строить новые высказывания. Такие слова и словосочетания называются *<u>логическими связками</u>*.

Логическое высказывание **— это любое повествовательное предложение, в отношении которого можно однозначно сказать, истинно оно или ложно.**
Логические связки "не”, “и”, “или”, “если... , то”, “тогда и только тогда” **и другие позволяют из уже заданных высказываний строить новые высказывания.**
Высказывания, образованные из других высказываний с помощью логических связок, называются _составными._ Высказывания, не являющиеся составными, называются _элементарными._

Так, например, из элементарных высказываний “*Петров — врач*”, “*Петров — шахматист*” при помощи связки “*и*” можно получить составное высказывание “*Петров — врач и шахматист*”, понимаемое как “*Петров — врач, хорошо играющий в шахматы*”.
При помощи связки “*или*” из этих же высказываний можно получить составное высказывание “*Петров — врач или шахматист*”, понимаемое в алгебре логики как “*Петров или врач, или шахматист, или и врач и шахматист одновременно*”.
Истинность или ложность получаемых таким образом составных высказываний зависит от истинности или ложности элементарных высказываний.

Каждая логическая связка рассматривается как операция над логическими высказываниями и имеет свое название и обозначение:

(1) **Операция, выражаемая словом “*не*”, называется** ***<u>отрицанием</u>*** **и обозначается чертой над высказыванием (или знаком щ).**

Высказывание истинно, когда A ложно, и ложно, когда A истинно. Пример. “*Луна — спутник Земли*” (A); “*Луна — не спутник Земли*” ( ).

(2) **Операция, выражаемая связкой “*и*”, называется *<u>конъюнкцией</u>* (лат. conjunctio — соединение) или логическим умножением и обозначается точкой "•" (может также обозначаться знаками Щ или &). Высказывание A•B истинно тогда и только тогда, когда оба высказывания A и B истинны. Например, высказывание**

“10 делится на 2 и 5 больше 3”
истинно, а высказывания

“10 делится на 2 и 5 не больше 3”,
“10 не делится на 2 и 5 больше 3”,
“10 не делится на 2 и 5 не больше 3”
ложны.

(3) Операция, выражаемая связкой "*или*" (в неразделительном, неисключающем смысле этого слова), называется ***дизъюнкцией*** (лат. disjunctio — разделение) или логическим сложением и обозначается знаком v (или плюсом). Высказывание A v B ложно тогда и только тогда, когда оба высказывания A и B ложны.

Например, высказывание

"10 не делится на 2 или 5 не больше 3"

ложно, а высказывания

"10 делится на 2 или 5 больше 3",

"10 делится на 2 или 5 не больше 3",

"10 не делится на 2 или 5 больше 3"

истинны.

(4) Операция, выражаемая связками "*если ..., то*", "*из ... следует*", "*... влечет ...*", называется *<u>импликацией</u>* (лат. *implico* — тесно связаны) и обозначается знаком □. Высказывание А □ В ложно тогда и только тогда, когда А истинно, а В — ложно. Например, даны 2 высказывания: "*данный четырёхугольник — квадрат*" (А) и "*около данного четырёхугольника можно описать окружность*" (В).

Рассмотрим составное высказывание A □ B, понимаемое как “*если данный четырёхугольник квадрат, то около него можно описать окружность*”. Есть три варианта, когда высказывание A □B истинно:

- **A** истинно и **B** истинно, то есть данный четырёхугольник квадрат, и около него можно описать окружность;
- **A** ложно и **B** истинно, то есть данный четырёхугольник не является квадратом, но около него можно описать окружность (разумеется, это справедливо не для всякого четырёхугольника);
- **A** ложно и **B** ложно, то есть данный четырёхугольник не является квадратом, и около него нельзя описать окружность.

Ложен только один вариант: A истинно и B ложно, то есть данный четырёхугольник является квадратом, но около него нельзя описать окружность.

(5) Операция, выражаемая связками “*тогда и только тогда*”, "*необходимо и достаточно*”, “... *равносильно* ...”, называется *эквиваленцией* или *двойной импликацией* и обозначается знаком □ или ~ .

Высказывание А □□В истинно тогда и только тогда, когда значения А и В совпадают.

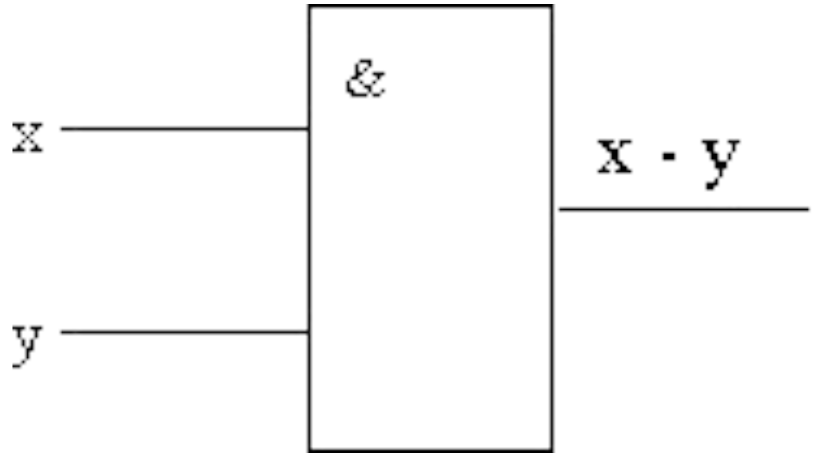
Существуют и другие логические операции:

- Операция, выражаемая связками “**если ..., то**”, “**из ... следует**”, “**... влечет ...”,** называется импликацией.
- Операция, выражаемая связками “тогда и только тогда”, "необходимо и достаточно”, “... равносильно ...”, называется эквиваленцией или двойной импликацией.
- Импликацию можно выразить через дизъюнкцию и отрицание.
- Эквиваленцию можно выразить через отрицание, дизъюнкцию и конъюнкцию.

Любое высказывание можно формализовать, то есть заменить логической формулой.
Формулы, принимающие значение “истина” при любых значениях истинности входящих в них переменных называются *тождественно истинными формулами или тавтологиями.*
Формулы, принимающие значение “ложно” при любых значениях истинности входящих в них переменных , называются *тождественно ложными формулами или противоречиями.*
Две формулы при одинаковых наборах значений входящих в них переменных, принимающие одинаковые значения, называются *равносильными.*

Логический элемент компьютера — это часть электронной логической схемы, которая реализует элементарную логическую функцию.
Таблица истинности это табличное представление логической схемы (операции), в котором перечислены все возможные сочетания значений истинности входных сигналов (операндов) вместе со значением истинности выходного сигнала (результата операции) для каждого из этих сочетаний.

С х е м а И



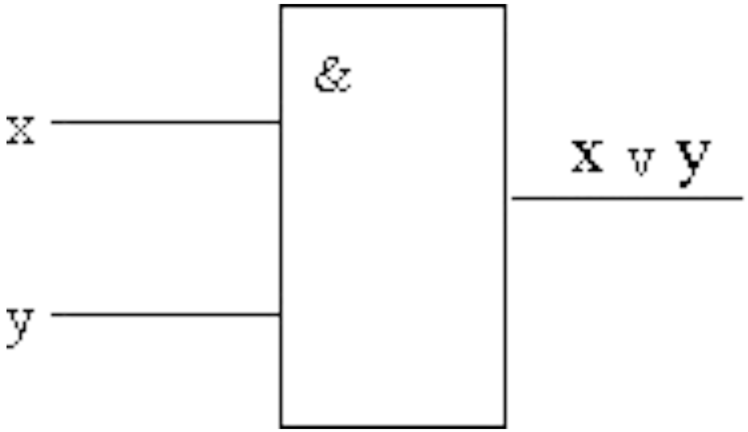
Единица на выходе схемы И будет тогда и только тогда, когда на всех входах будут единицы. Когда хотя бы на одном входе будет ноль, на выходе также будет ноль.

Схема И реализует конъюнкцию двух или более логических значений.

Таблица истинности

x	y	x·y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

С х е м а ИЛИ



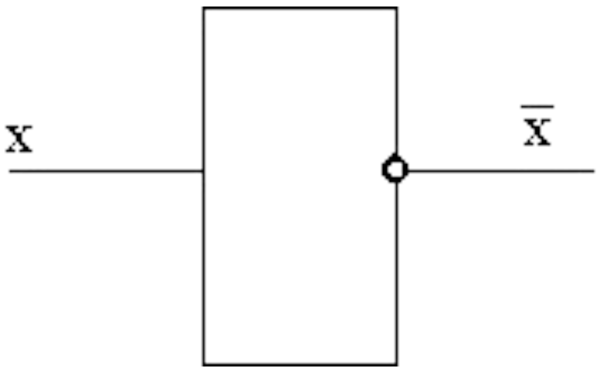
Когда хотя бы на одном входе схемы ИЛИ будет единица, на её выходе также будет единица.

Схема ИЛИ реализует дизъюнкцию двух или более логических значений.

Таблица истинности

x	y	x v y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Схема НЕ



Если на входе схемы 0, то на выходе 1. Когда на входе 1, на выходе 0.

Схема НЕ (инвертор) реализует операцию отрицания.

Таблица истинности

x	$\overline{x}$
0	1
1	0

Схема И-НЕ

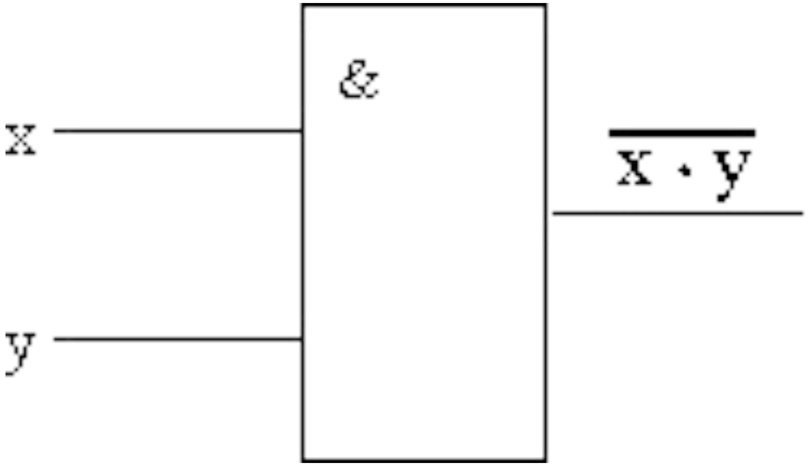


Схема И-НЕ состоит из элемента И и инвертора и осуществляет отрицание результата схемы И.

Таблица истинности

x	y	$\overline{x \cdot y}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

С х е м а   ИЛИ - НЕ

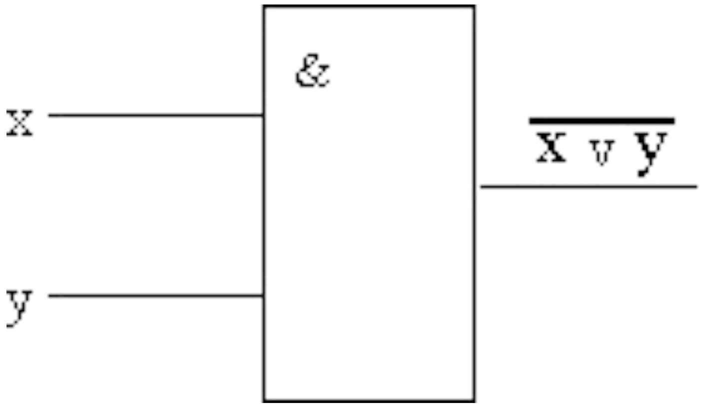


Схема ИЛИ-НЕ состоит из элемента ИЛИ и инвертора и осуществляет отрицание результата схемы ИЛИ.

Таблица истинности

x	y	$\overline{x \vee y}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Преобразование выражений, состоящих из булевых функций

- от перестановки мест аргументов результат не изменяется
  A & B = B & A
- существует следующий закон
  A & (B & C) = (A & B) & C
- Также существуют некоторые тождества, опирающиеся на особые свойства функции, например:
  1) A & (~A) = ЛОЖЬ
  2) (~A) & (~B) = ~ (A v B)
  Аналогично, сложение и логическое «ИЛИ»:
- от перестановки мест аргументов результат не изменяется
  A v B = B v A
- существует следующий закон
  (A v B) v C = A v (B v C)
- можно выносить общий множитель за скобки
  (A & B) v (C & B) = B & (A v C)
  И также некоторые собственные законы:
  1) A v (~A) = ИСТИНА
  2) (~A) v (~B) = ~ (A & B)

Самостоятельная работа №8

- Что такое алгебра логики?
- Перечислите основные логические операции?
- Что такое логический элемент компьютера?