

Кафедра математики и моделирования
Старший преподаватель Г.В. Аверкова
Курс «Высшая математика»

Тема 8 «Вывод канонических уравнений гиперболы и параболы»

Исследование формы гиперболы и параболы по их уравнениям. График квадратного трехчлена, уравнение равносторонней гиперболы, асимптоты которой приняты за оси координат, график дробно-линейной функции.

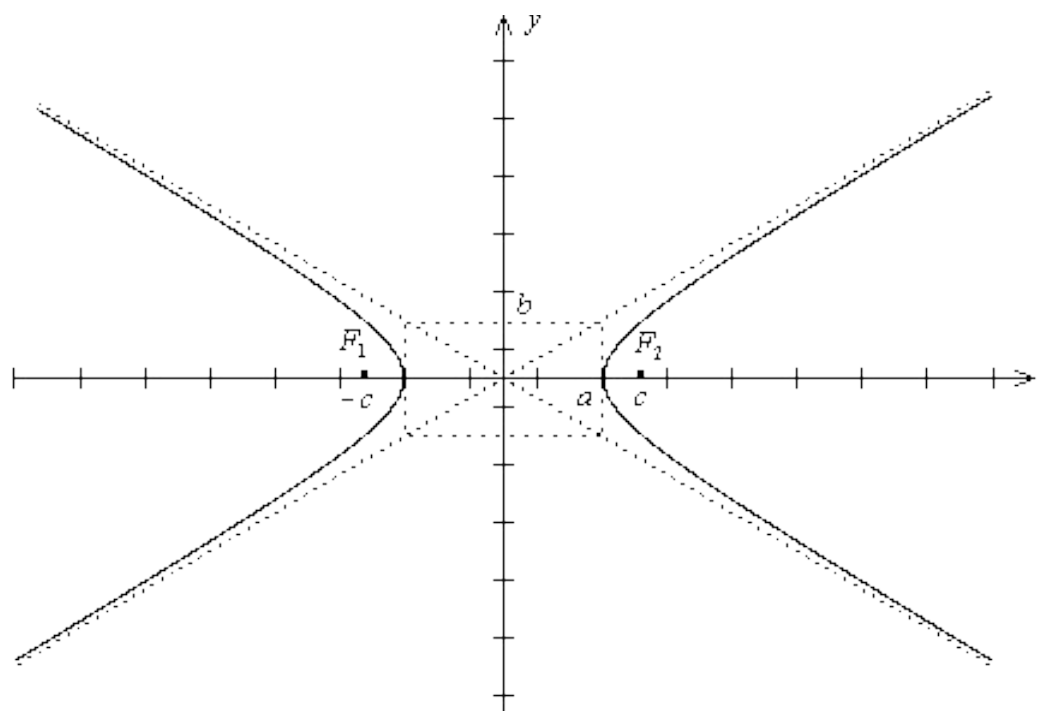
Цели и задачи

- Цели:
 - Рассмотреть основные понятия по теме «Вывод канонических уравнений гиперболы и параболы»
- Задачи:
 - Рассмотреть свойства гиперболы
 - Рассмотреть свойства параболы

Теоретический материал

Гиперболой называется кривая, уравнение которой в некоторой прямоугольной системе координат имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > 0, \quad b > 0$$



Теоретический материал

Свойства гиперболы

1) Параметры a , b называются соответственно действительной и мнимой полуосями гиперболы.

Гипербола лежит вне полосы $|x| < a$

Вершинами гиперболы являются точки $(a, 0)$, $(-a, 0)$

2) Гипербола лежит в вертикальных углах, образованных прямыми $y = \pm \frac{b}{a}x$ и содержащих точки оси Ox

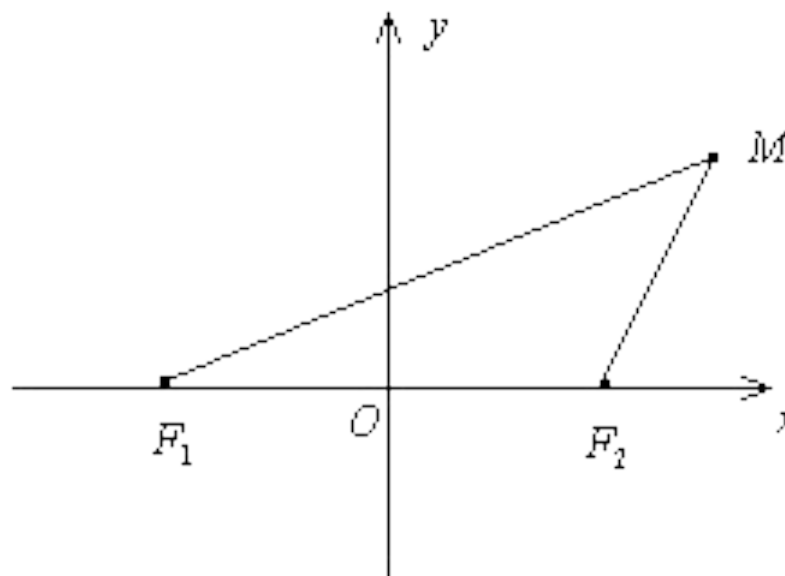
Данные прямые называются асимптотами гиперболы

Теоретический материал

- 3) Координатные оси Ox и Oy канонической системы координат являются осями симметрии гиперболы, а начало координат – ее центром симметрии
- 4) На гиперболе лежат точки, сколь угодно далекие от начала координат
- 5) Гипербола есть множество точек, абсолютная величина разности расстояний от которых до двух данных точек (фокусов) постоянна (равна заданному числу)

Теоретический материал

Точки $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$, где $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, называются соответственно правым и левым фокусами гиперболы. Величина $2c$ называется фокусным расстоянием.



Теоретический материал

6) Гипербола есть множество точек плоскости, отношение расстояний от которых до данной точки (фокуса гиперболы) и до данной прямой (одноименной с фокусом директрисы) постоянно (равно эксцентриситету гиперболы)

Число $\varepsilon = \frac{c}{a}$ называется эксцентриситетом гиперболы

Правой и левой директрисой гиперболы называются прямые

$$x = \frac{a}{\varepsilon}, \quad x = -\frac{a}{\varepsilon}$$

7) Оптическое свойство гиперболы

Если поместить в один из фокусов гиперболы с зеркальной «поверхностью» точечный источник света, то все лучи после отражения от «поверхности» видятся исходящими из другого фокуса

Гипербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$

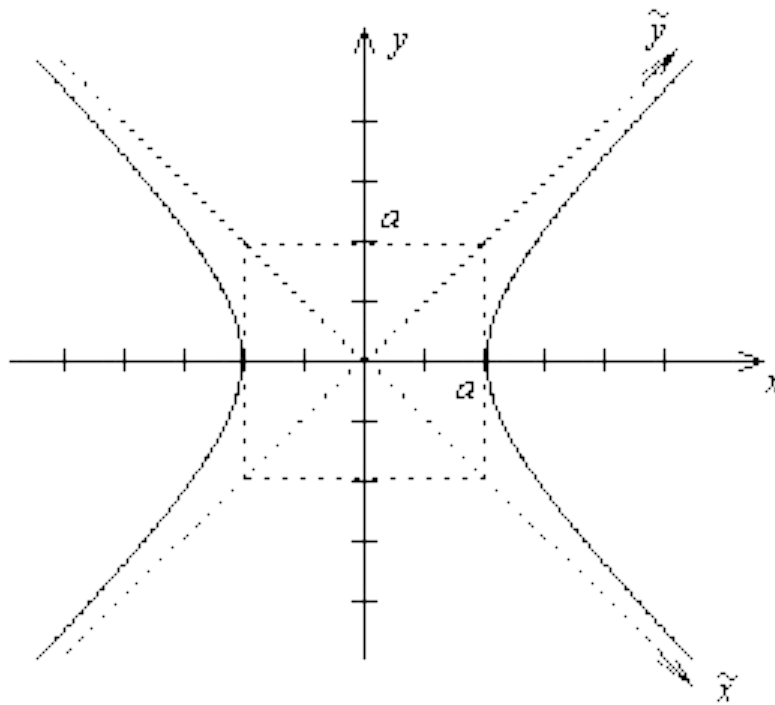
называется сопряженной к гиперболе

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Теоретический материал

Равносторонняя гипербола

Если действительная и мнимая полуоси гиперболы равны, то гипербола называется равносторонней.

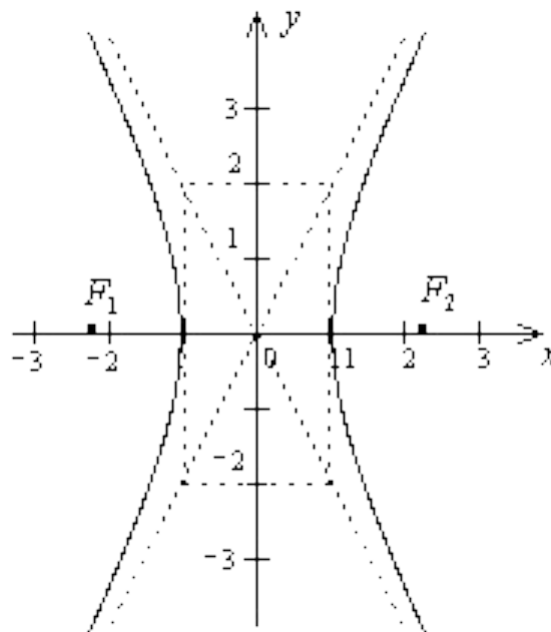


Теоретический материал

Исследование формы гиперболы по ее уравнению

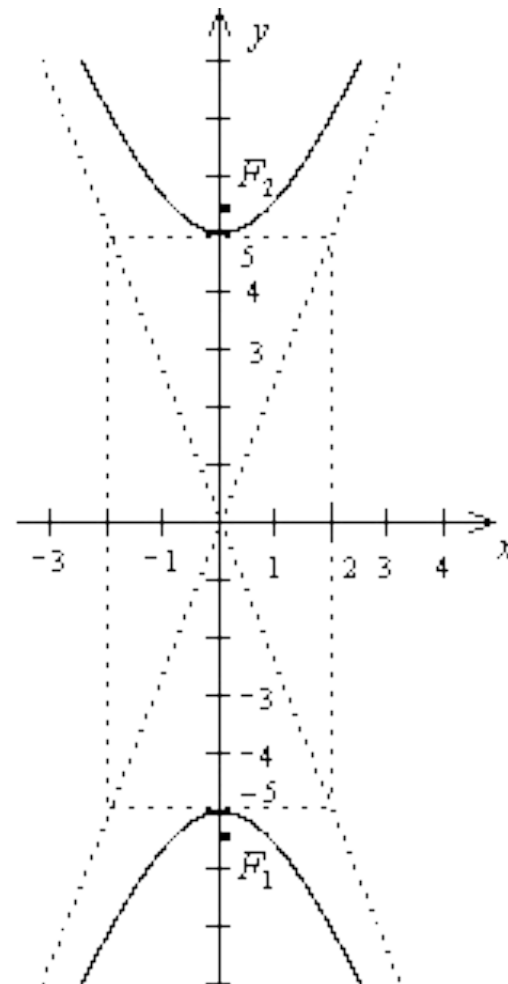
Пример 1

$$\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{4} = 1$$



Теоретический материал

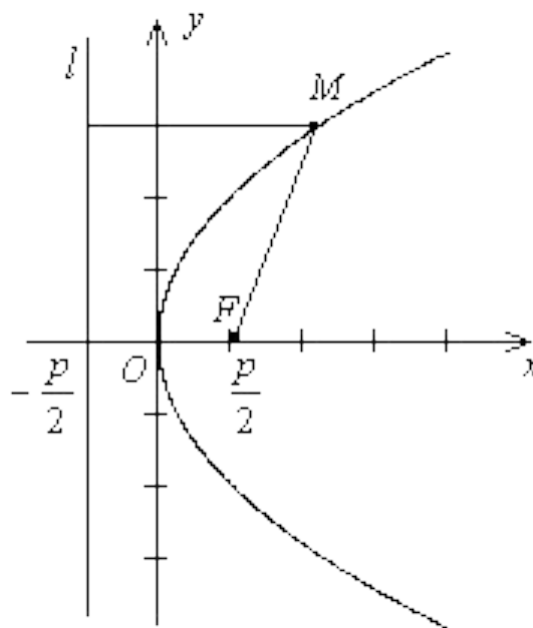
Пример 2 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{25} = -1$



Теоретический материал

Параболой называется кривая, уравнение которой в некоторой прямоугольной системе координат имеет вид:

$$y^2 = 2px, \quad p > 0$$



Теоретический материал

Свойства параболы

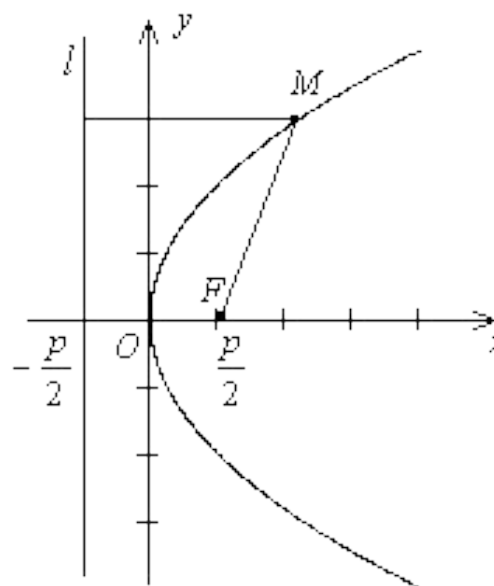
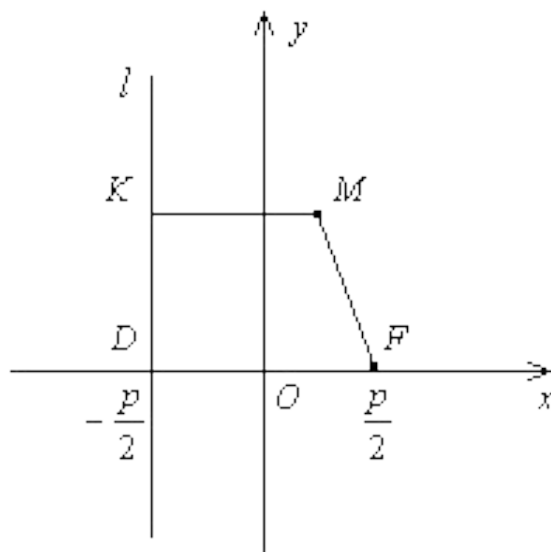
- 1) Все точки параболы лежат в правой полуплоскости.
Точка $O(0,0)$ лежит на параболе и называется ее вершиной.
- 2) На параболе лежат точки, сколь угодно далекие от начала координат
- 3) Ось абсцисс канонической координатной системы является единственной осью симметрии параболы.
Ось симметрии параболы называется осью параболы.

Теоретический материал

4) Парабола есть множество точек, равноудаленных от данной точки (фокуса параболы) и от данной прямой (директрисы параболы).

Точка $F(p/2, 0)$ - фокус параболы

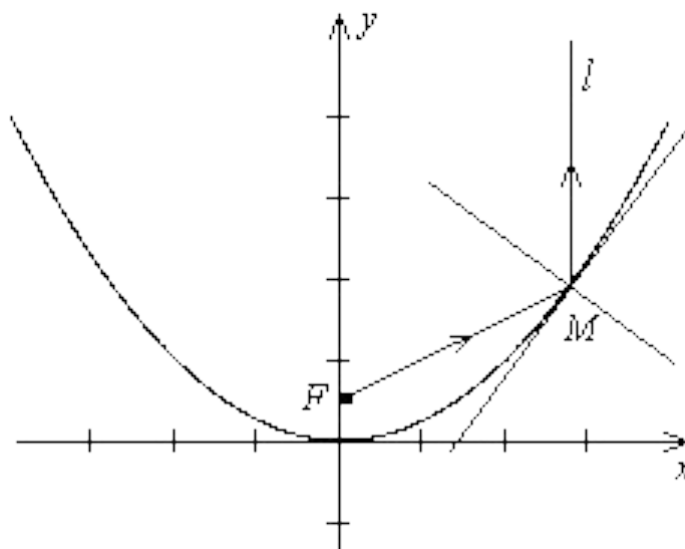
Прямая $x = -\frac{p}{2}$ - директриса параболы



Теоретический материал

5) Оптическое свойство параболы

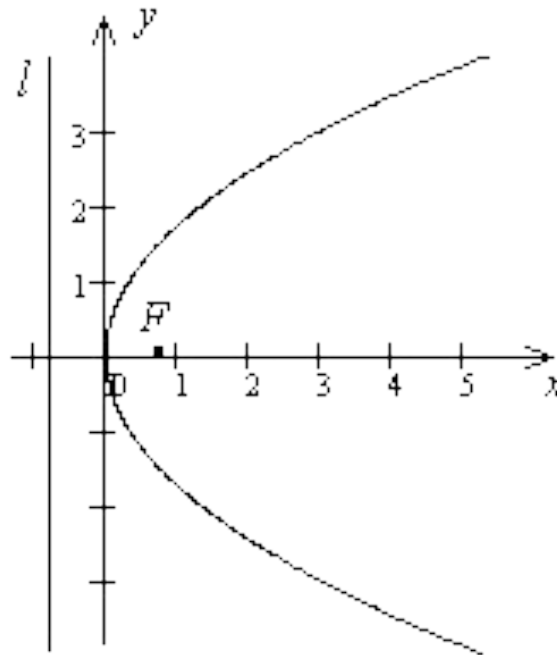
Если в фокус параболы с зеркальной «поверхностью» помещен точечный источник света, то все лучи, отраженные от зеркальной «поверхности» параболы, будут направлены параллельно оси параболы



Теоретический материал

Пример 3

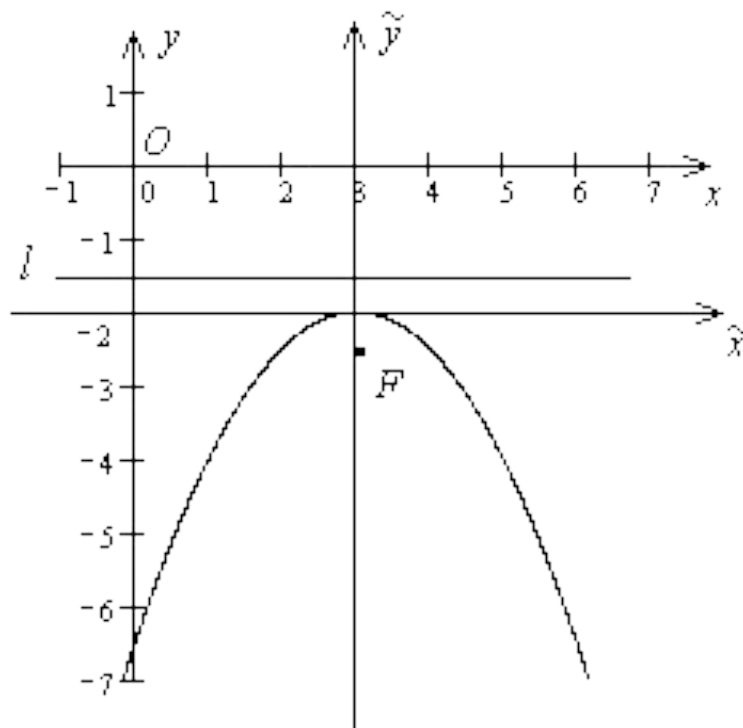
$$y^2 = 3x$$



Теоретический материал

Пример 4

$$(x-3)^2 = -10(y+2)$$



Ключевые понятия

- Гипербола
- Парабола
- Эксцентриситет
- Фокус
- Директриса
- Асимптоты

Контрольные вопросы

- Определение гиперболы
- Свойства гиперболы
- Эксцентриситет гиперболы
- Директрисы и фокусы гиперболы
- Определение параболы и свойства
- Директриса и фокус параболы
- Альтернативные определения гиперболы и параболы

Дополнительная литература
