1.*Способ неопределенных коэффициентов для нахождения частного решения неопределенного линейного уравнения.*

- Этот способ применим для правой части специального вида, которая содержит показательные функции, синусы, косинусы и многочлены или их целые рациональные комбинации.

Частное решение ищется в форме, аналогичной правой части.

Если правая часть имеет вид

$$g(x) = P_m(x)e^{kx}\cos lx + \bar{P}_m e^{kx}\sin lx$$

, то частное решение примет следующий вид $y_{чн} = x^{\alpha}Q_m e^{kx}\cos lx + x^{\alpha}\bar{Q}_m e^{kx}\sin lx$, где - α кратность корней $k \pm l_i$ среди корней характеризующих уравнения. $Q_m(x)$, $\bar{Q}_m(x) -$ многочлены той же степени, что и P_m , $\bar{P}_m$, но взятые в общем виде

Вид правой части	Корни характеризующие уравнения	Вид частного решения
1. $P_m(x)$	А)0 - не является корнем характеризующим уравнения. Б)0- кратности α	$y_{чн}=Q_m(x)$ $y_{чн}=x^{\alpha}Q_m(x)$
2. $P_m(x)e^{kx}$	А) K – не корень. Б) K – корень кратности α	$y_{чн}=Q_m(x)e^{kx}$ $y_{чн}=x^{\alpha}Q_m(x)e^{kx}$
3. $P_m(x)\cos lx+\bar{P}_m(x)\sin lx$	А) $\pm l_i$ – не является корнем. Б) $\pm l_i$ – корень кратности α.	$Q_m(x)\cos lx+\bar{Q}_m(x)\sin(x)$ $x^{\alpha}(Q_m(x)\cos lx+\bar{Q}_m(x)\sin(x)$
4. $P_m(x)e^{kx}\cos lx+\bar{P}_m(x)e^{kx}\sin lx$	А) $k\pm l_i$ – числа не корень. Б) $k\pm l_i$ – числа корень кратности α .	$Q_m(x)e^{kx}\cos lx+\bar{Q}_m(x)\sin lx$ $x^{\alpha}(Q_m e^{kx}\cos lx+\bar{Q}_m(x)\sin lx$

2.Метод вариации произвольной постоянной решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

- Окончательно, для нахождения неизвестных функций C_i , мы получим систему n уравнений n с неизвестными

C_i' где $i = \overline{1,4}$

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 + C_3' y_3 + C_4' y_4 = 0 \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' + C_3' y_3' + C_4' y_4' = 0 \\ C_1' y_1'' + C_2' y_2'' + C_3' y_3'' + C_4' y_4'' = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_1' y_1^{(n-1)} + C_2' y_2^{(n-1)} + C_3' y_3^{(n-1)} + C_4' y_4^{(n-1)} = g(x) \end{cases}$$

4. Линейные уравнения с переменными коэффициентами.

Уравнения Бесселя. Функция Бесселя.

- *Задача:* Вертикально стоящий и изгибающийся под действием своего веса стержень длины l. Дифференциальное уравнение изогнутой оси имеет вид:

$$y'' + \frac{1}{x} y' + (1 - \frac{1}{9m^2}) y = 0$$

Уравнение Бесселя с индексом $m = \frac{1}{3}$.

Общий вид:

$$y'' + \frac{1}{x} y' + (1 - \frac{m^2}{x^2}) y = 0.$$

Определение

Функции, удовлетворяющие уравнению Бесселя, называются функциями Бесселя.

- функцию, являющуюся решением дифференциального уравнения называют бесселевой функцией первого рода с индексом m и обозначают

$$I_m(x)$$

- Чтобы получить окончательное выражение для $I_m(x)$, вводят специальную функцию- Гамма функцию Эйлера.

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} u^{x-1} e^{-u}\,du$$

(интегрируем по частям), получаем, что $\Gamma(x) = \frac{1}{x}\Gamma(x+1)$ или $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ основное функциональное уравнение.

Для $x -$ натурального получаем

$\Gamma(1) = 1$; $\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1$,

$\Gamma(3) = 2 \cdot \Gamma(2) = 2$ и так далее,

$(\Gamma(1) = 1 < 0!)$

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

Второе частное решение зависит от m и, окончательно

$$y = C_1 I_m(x) + C_2 I_{-m}(x)$$

- Иногда вместо $I_{-m}(x)$ берут линейную комбинацию, содержащую $\cos m\pi$, $\sin mx$, т.е $Y_m(x)$, тогда $Y = C_1 I_m(x) + C_2 Y_m(x)$, функция Вебера, или функция Бесселя второго рода.

Функция Бесселя и тригонометрические функции связаны тесно: при определении m они ведут себя идентично (в школе затухающие колебания $m = \pm 1/2$).

- **Уравнение Лагранжа** с переменными коэффициентами

$$(X^2-1)y'' + 2xy' - n(n+1)y = 0.$$

$n -$ натуральные решения-многочлены, которые выражаются формулой *Родрига*

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!}\frac{d^n\left(x^2-1\right)^n}{dx^2}$$

5. Уравнение Эйлера.

Определение1.

- Уравнение вида

$$x^n y^{(a)} + p_1 x^{n-1} y^{(a-1)} + \ldots + p_{n-1} x y' + p_1 y = g(x)$$

где $p_1 \ldots p_n - const$, называется *уравнением Эйлера.*

Теорема1:

Уравнение Эйлера приводится к линейному уравнению с постоянными коэффициентами заменой независимого переменного подстановкой $x = e^t$ (или $t = \ln x$).

Определение2

Однородное уравнение Эйлера имеет вид

$$x^n y^{(n)} + p_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1} x y' + p_n y = 0$$

Глава3. Системы дифференциальных уравнений.

1.Нормальные системы дифференциальных уравнений.

Дано:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$$

пусть

$$y = y_1,$$

$$y' = y_1' = y_2,$$

$$y'' = y_2' = y_3,$$

$$y^{(n-1)} = y_n.$$

$$y^n = g_n = f(x, y_1, y_2, ..., y_n).$$

- Таким образом, из уравнения $n-$ого порядка мы получили систему дифференциальных уравнений первого порядка.

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ y^{(n-1)} = y_n \\ y_n' = f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{cases}$$

n штук неизвестных функций, n уравнений.

Полученная система представляет собой частный случай системы

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, \ldots, y_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = f_n(x, y_1, \ldots, y_n) \end{cases}$$

Определение1

Такая система называется ***нормальной системой*** дифференциальных уравнений.

Определение2.

Решением системы называется совокупность n функций $y_1, y_2, ..., y_n$, удовлетворяющих всем всем уравнением системы.

Определение3.

Частным решением системы называется решение, удовлетворяющее начальным условиям.

Замечание.

Для ***нормальной системы*** дифференциальных уравнений может быть доказана теорема существования и единственности решения, частным случаем которой является теорема существования и единственности решения для дифференциального уравнения $n-$ ого порядка.

Теорема:

Нормальная система n дифференциальных уравнений первого порядка эквивалентна одному дифференциальному уравнению n порядка .

Методы решения:

- 1). Переходят к уравнению $n-$ого порядка
- 2). Метод интегрирования комбинаций, когда для неизвестных n функций ищут n зависимостей между функциями и штук const, затем решают n систему относительно искомых функций.

2. Линейные системы с постоянными коэффициентами.

Определение

- Нормальная система дифференциальных уравнений называется линейной, если функции

$$f_1, f_2, \ldots, f_n$$

линейны относительно искомых функций.

- ***T.e.***

$$
\begin{cases}
y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n + b_1 \\
y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n + b_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n + b_n
\end{cases}
$$