

1. *Способ неопределенных коэффициентов для нахождения частного решения неопределенного линейного уравнения.*

- Этот способ применим для правой части специального вида, которая содержит показательные функции, синусы, косинусы и многочлены или их целые рациональные комбинации.

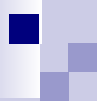
Частное решение ищется в форме, аналогичной правой части.

Если правая часть имеет вид

$$g(x) = P_m(x)e^{kx} \cos lx + \bar{P}_m e^{kx} \sin lx$$

, то частное решение примет следующий вид $y_{\text{чп}} = x^\alpha Q_m e^{kx} \cos lx + x^\alpha \bar{Q}_m e^{kx} \sin lx$, где α - кратность корней $k \pm li$ среди корней характеризующих уравнения. $Q_m(x)$, $\bar{Q}_m(x)$ - многочлены той же степени, что и P_m , \bar{P}_m , но взятые в общем виде

Вид правой части	Корни характеризующие уравнения	Вид частного решения
1. $P_m(x)$	А) 0 - не является корнем характеризующим уравнения. Б) 0- кратности α	$y_{\text{чп}} = Q_m(x)$ $y_{\text{чп}} = x^\alpha Q_m(x)$
2. $P_m(x)e^{kx}$	А) K – не корень. Б) K – корень кратности α	$y_{\text{чп}} = Q_m(x)e^{kx}$ $y_{\text{чп}} = x^\alpha Q_m(x)e^{kx}$
3. $P_m(x) \cos lx + \bar{P}_m(x) \sin lx$	А) $\pm l_i$ не является корнем. Б) $\pm l_i$ – корень кратности α	$Q_m(x) \cos lx + \bar{Q}_m(x) \sin(x)$ $x^\alpha (Q_m(x) \cos lx + \bar{Q}_m(x) \sin(x))$
4. $P_m(x)e^{kx} \cos lx + \bar{P}_m(x)e^{kx} \sin lx$	А) $k \pm l_i$ - числа не корень. Б) $k \pm l_i$ – числа корень кратности α .	$Q_m(x)e^{kx} \cos lx + \bar{Q}_m(x) \sin lx$ $x^\alpha (Q_m e^{kx} \cos lx + \bar{Q}_m(x) \sin lx)$

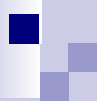


2. Метод вариации
произвольной постоянной
решения линейных
неоднородных
дифференциальных
уравнений с постоянными
коэффициентами.

■ Окончательно, для нахождения неизвестных функций C_i , мы получим систему n уравнений n с неизвестными

$$C'_i \quad \text{где} \quad i = \overline{1,4}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} C'_1 y_1 + C'_2 y_2 + C'_3 y_3 + C'_4 y_4 = 0 \\ C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 + C'_3 y'_3 + C'_4 y'_4 = 0 \\ C'_1 y''_1 + C'_2 y''_2 + C'_3 y''_3 + C'_4 y''_4 = 0 \\ \dots\dots\dots \\ C'_1 y_1^{(n-1)} + C'_2 y_2^{(n-1)} + C'_3 y_3^{(n-1)} + C'_4 y_4^{(n-1)} = g(x) \end{array} \right.$$



4. Линейные уравнения с переменными коэффициентами.

Уравнения Бесселя. Функция Бесселя.

- *Задача:* Вертикально стоящий и изгибающийся под действием своего веса стержень длины l . Дифференциальное уравнение изогнутой оси имеет вид:

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{1}{9m^2}\right) y = 0$$

Уравнение Бесселя с индексом $m = \frac{1}{3}$.

Общий вид:

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right) y = 0$$

Определение

Функции,
удовлетворяющие
уравнению Бесселя,
называются функциями
Бесселя.

- функцию, являющуюся решением дифференциального уравнения называют бесселевой функцией первого рода с индексом m и обозначают

$$I_m(x)$$

- Чтобы получить окончательное выражение для $I_m(x)$, вводят специальную функцию- Гамма функцию Эйлера.

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} u^{x-1} e^{-u} du \quad (\text{интегрируем по частям}),$$

получаем, что $\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$ или

основное функциональное уравнение.

Для x – натурального
получаем

$$\Gamma(1) = 1 \quad ; \quad \Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1,$$

$$\Gamma(3) = 2 \cdot \Gamma(2) = 2 \text{ и так далее,}$$

$(\Gamma(1) = 1 < 0!)$

$$\Gamma(n) = (n - 1)!$$

Второе частное решение
зависит от m и,
окончательно

$$y = C_1 I_m(x) + C_2 I_{-m}(x)$$

- Иногда вместо $I_{-m}(x)$ берут линейную комбинацию, содержащую $\cos m\pi$, $\sin mx$, т.е. $Y_m(x)$, тогда $Y = C_1 I_m(x) + C_2 Y_m(x)$, функция Вебера, или функция Бесселя второго рода.

Функция Бесселя и
тригонометрические функции
связаны тесно: при
определении m они ведут
себя идентично (в школе
затухающие колебания

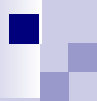
$$m = \pm \frac{1}{2} \quad).$$

■ **Уравнение Лагранжа с переменными коэффициентами**

$$(X^2 - 1)y'' + 2xy' - n(n + 1)y = 0.$$

n – натуральные решения-многочлены, которые выражаются формулой *Родрига*

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^2}$$



5. Уравнение Эйлера.

Определение 1.

- Уравнение вида

$$x^n y^{(a)} + p_1 x^{n-1} y^{(a-1)} + \dots + p_{n-1} x y' + p_n y = g(x)$$

где $p_1 \dots p_n - const$, называется
уравнением Эйлера.

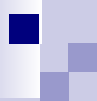
Теорема1:

Уравнение Эйлера приводится к линейному уравнению с постоянными коэффициентами заменой независимого переменного подстановкой $x = e^t$ (или $t = \ln x$).

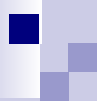
Определение 2

***Однородное уравнение
Эйлера имеет вид***

$$x^n y^{(n)} + p_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} x y' + p_n y = 0$$



Глава 3.
Системы
дифференциальных
уравнений.



1. Нормальные системы дифференциальны х уравнений.

Дано:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

пусть

$$y = y_1,$$

$$y' = y_1' = y_2,$$

$$y'' = y_2' = y_3,$$

$$y^{(n-1)} = y_n.$$

$$y^n = g_n = f(x, y_1, y_2, \dots, y_n).$$

- Таким образом, из уравнения n – о го порядка мы получили систему дифференциальных уравнений первого порядка.

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \dots \\ y^{(n-1)} = y_n \\ y_n' = f(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases}$$

n штук неизвестных функций, n уравнений.

*Полученная система
представляет собой
частный случай системы*

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, \dots, y_n) \\ \dots \dots \dots \\ y_n' = f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{array} \right.$$

Определение 1

Такая система называется ***нормальной системой*** дифференциальных уравнений.

Определение 2.

Решением системы называется совокупность n функций

y_1, y_2, \dots, y_n , удовлетворяющих всем уравнением системы.



Определение 3.

Частным решением системы называется решение, удовлетворяющее начальным условиям.

Замечание.

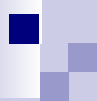
Для ***нормальной системы*** дифференциальных уравнений может быть доказана теорема существования и единственности решения, частным случаем которой является теорема существования и единственности решения для дифференциального уравнения n – ого порядка.

Теорема:

**Нормальная система n
дифференциальных уравнений первого
порядка эквивалентна одному
дифференциальному уравнению
 n порядка .**

Методы решения:

- 1). Переходят к уравнению n – ого порядка
- 2). Метод интегрирования комбинаций, когда для неизвестных n функций ищут зависимости между функциями и штук const , затем решают систему относительно искомым функций.



2. Линейные системы с постоянными коэффициентами.

Определение

■ Нормальная система дифференциальных уравнений называется линейной, если функции

$$f_1, f_2, \dots, f_n$$

линейны относительно искомым функций.

■ *T.e.*

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n + b_1 \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n + b_2 \\ \dots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n + b_n \end{array} \right.$$