5. Уравнение в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель.

Теорема:

- Для того чтобы дифференцировать выражение $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$, где M и N определены и непрерывны в области плоскости XOY и имеют в ней D непрерывные частные производные $\frac{\partial M}{\partial y}$ и $\frac{\partial N}{\partial x}$,представляла собой полный дифференциал некоторой функции $U(x,y)$, необходимо и достаточно, чтобы во всех точках области D было выполнено условие $$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}.$$

Интегрирующий множитель.

- Если $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$, то уравнение $Mdx + Ndy = 0$ не является уравнением в полных дифференциалах. Однако это уравнение можно превратить в уравнения в полных дифференциалах умножением на подходящую функцию $\mu(x, y)$. Такая функция называется интегрирующим множителем для данного дифференциального уравнения.

- Практически поступают так: берут выражение $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$, делят на $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$, если не зависит частное от y , то находят $\mu = \mu(x)$ по формуле $\mu(x) = e$, если в противном случае $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$ делят на $M(x; y)$ и если частное не зависит от x , то существует $\mu = \mu(y)$ и его находят по формуле

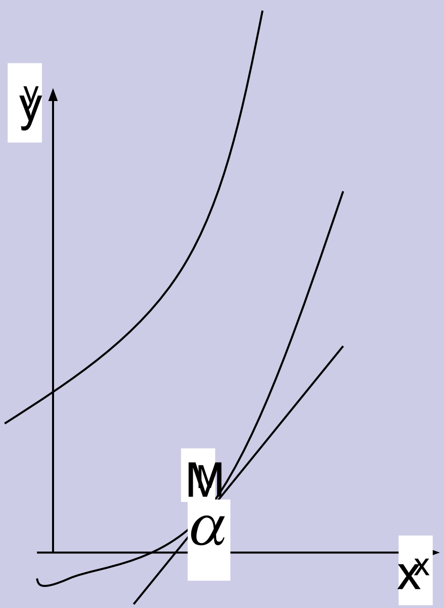
$$\mu(y) = e^{-\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{M} dy}$$

6.Дополнительные сведения.

Дифференциальное уравнение может быть также истолковано следующим образом.

- Пусть $y=\varphi(x;c)$ - общее решение дифференциального уравнения, т.е. семейство интегрирующих кривых в некоторой области D, плоскости XOY, в которой определена функция $f(x;y)$. Дифференциальное уравнение устанавливает связь между координатами любой точки $M(x;y)$ области D и значением производной в этой точке. Зная x и y точки M, можно найти $y' = f(x;y)$ значение производной, т.е. угловой коэффициент касательной к интегрирующей кривой, проходящую через точку M.

- Рисунок 5



- $k = tg\alpha = y' = f(x_M; y_M)$. Т.е. дифференциальное уравнение $y' = f(x; y)$ определяет совокупность направлений, или поле направлений в области D. Изображая стрелкой направление, можно построить поле направлений дифференциального уравнения $y' = f(x; y)$.

- Геометрически задача интегрирования дифференциального уравнения заключается в нахождении кривых, которые в каждой своей точке касаются направления, задаваемым полем .

Теорема (Коши).

- Если функция $f(x;y)$ определена и непрерывна в области D плоскости XOY и имеет непрерывную частную производную $\frac{\partial f}{\partial y}$ во всех точках этой области, то, какова бы ни была точка $M_0(x_0;y_0)$ области D, всегда существует и притом единственная, функция $y=\varphi(x)$, которая определена и непрерывна в некотором интервале, содержащим точку x_0, является решением уравнения $y' = f(x;y)$ и принимает при $x = x_0$ значение $y = y_0$.

7. Уравнение первого порядка, не разрешенные относительно производной.

- Рассмотрим дифференциальное уравнение $F(x; y; y') = 0$, не разрешенное относительно y' .

Случай 1.

- Уравнение первого порядка

$$(y')^n + p_1(y')^{n-1} + p_0(y')^{n-2} + \ldots + p_{n-1}y' + p_n y = 0$$

n-й степени , где n-целое положительное число, p_i , $(i = \overline{1,n})$ - функции от *x* и *y*.

Получили :

$$y' = f_1(x;y)$$

$$y' = f_2(x;y)$$

$$y' = f_n(x;y)$$

Общие интегралы имеют вид:

$$\Phi_1(x;y;c_1)=0,\ldots,\Phi_n(x;y;c_n)=0$$

Случай 2.

- Уравнение разрешенное относительно *y* и не содержащее *x* $y = \varphi(y')$. Это уравнение решается методом введения параметра *p*.
- Пусть $y' = p$, тогда $y = \varphi(p)$.

- Пусть $y = \varphi(p)$,
  тогда $y' = p$.

Случай 3.

- Уравнение разрешенное относительно *x* и не содержащее *y*: $x = \varphi(y')$.
  - Аналогично: $y' = p$, $x = \varphi(p)$

Случай 4.

- . Уравнения не содержащие *x* и *y*, но не обязательно разрешенные относительно *y* и *x*.
- $$F(y, y') = 0 \qquad (*)$$

$$F(x, y') = 0 \qquad (**)$$

Случай 5.

- **Уравнение Лагранжа.**

Уравнение, линейно относительно x и y , т.е. имеющее вид

$$y = \varphi(y')x + \phi(y').$$

1-й случай $\varphi(y') \neq y'$.

- Его общий интеграл имеет вид $\Phi(x, p, c) = 0$, вместе с уравнением $y = \varphi(p)x + \phi(p)$ он дает общий интеграл уравнения Лагранжа.

2-й случай $\varphi(p) = p$.

$$y = x\varphi(p_i) + \phi(p_i)$$

$$i = \overline{1,k}$$

Случай 6.

- Уравнение Клеро

$$y = xy' + \phi(y')$$