

# Круги Эйлера в решении задач



**Выполнила:**

**Бандурина Елена 6«А»**

**Учитель: Орлова О.А.**

**МОУ-СОШ №9 г.Аткарск**

# Леонард Эйлер

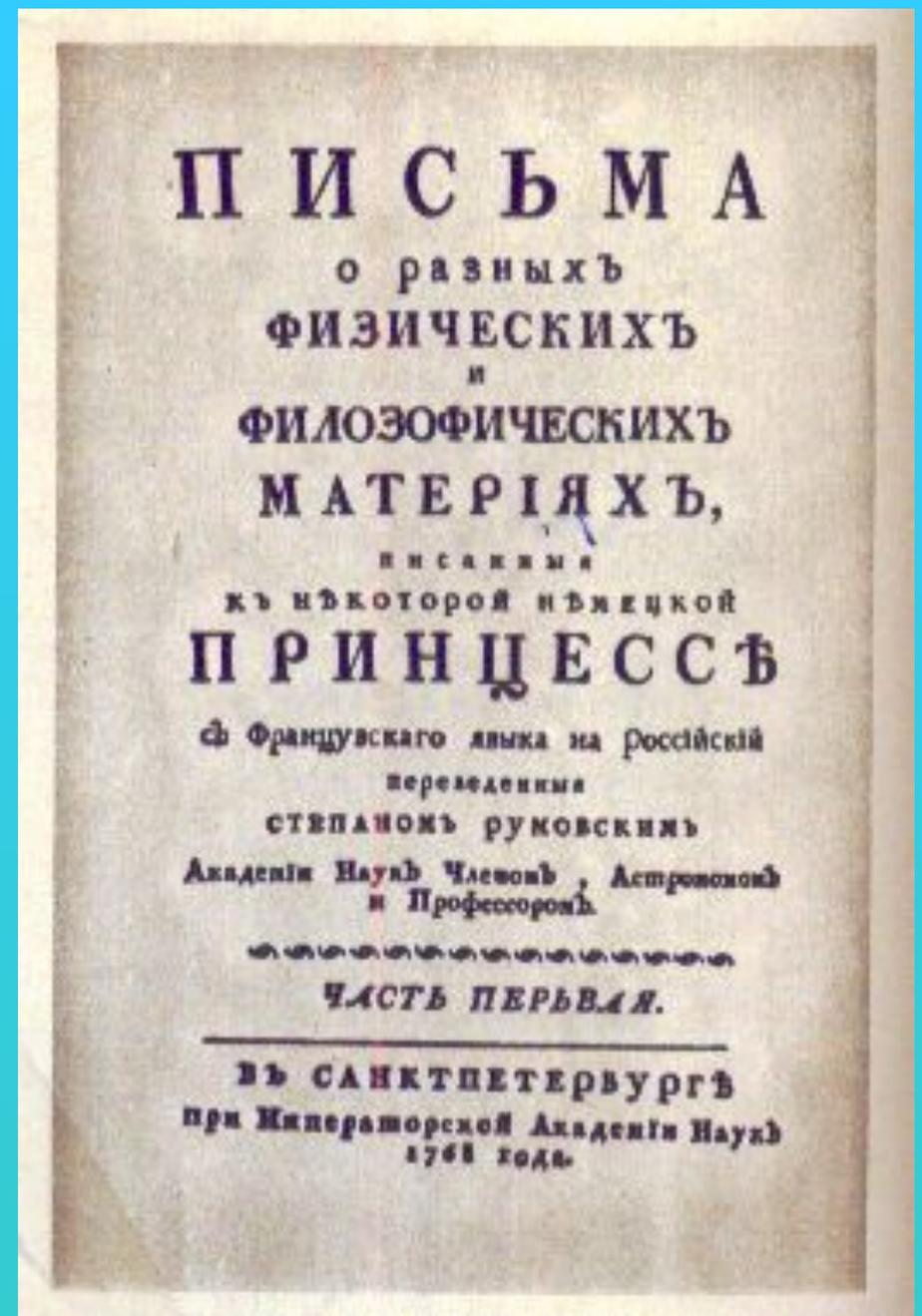


(1707 г.-1783 г.)

Леонард Эйлер, крупнейший математик XVIII века, родился в Швейцарии. В 1727г. по приглашению Петербургской академии наук он приехал в Россию. Эйлер попал в круг выдающихся математиков, получил большие возможности для создания и издания своих трудов. Он работал с увлечением и вскоре стал, по единодушному признанию современников, первым математиком мира.

Одним из первых, кто использовал для решения задач круги, был выдающийся немецкий математик и философ Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646 – 1716). В его черновых набросках были обнаружены рисунки с кругами. Затем этот метод основательно развил швейцарский математик Леонард Эйлер (1707 – 1783).

С 1761 по 1768 год им были написаны знаменитые «Письма к немецкой принцессе», где Эйлер как раз и рассказывал о своем методе, об изображении множеств в виде кругов. Именно поэтому рисунки в виде кругов, обычно называют «кругами Эйлера». Эйлер отмечал, что изображение множеств в виде кругов «очень подходит для того, чтобы облегчить наши рассуждения». Понятно, что слово «круг» здесь весьма условно, множества могут изображаться на плоскости в виде произвольных фигур.



После Эйлера этот же метод разрабатывал чешский математик Бернард Больцано (1781 – 1848). Только в отличие от Эйлера он рисовал не круговые, а прямоугольные схемы. Методом кругов Эйлера пользовался и немецкий математик Эрнст Шредер (1841 – 1902). Этот метод широко используется в его книге «Алгебра логика». Но наибольшего расцвета графические методы достигли в сочинениях английского логика Джона Венна (1843 – 1923). С наибольшей полнотой этот метод изложен им в книге «Символическая логика», изданной в Лондоне в 1881 году. В честь Венна вместо кругов Эйлера соответствующие рисунки называют иногда диаграммами Венна; в некоторых книгах их называют также диаграммами (или кругами) Эйлера – Венна.



# Очевидное и невероятное

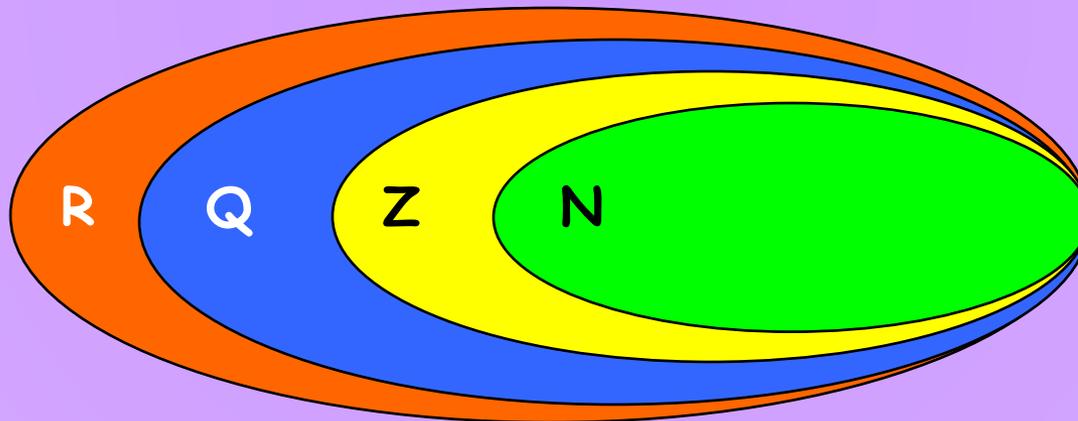
Множество всех действительных чисел Эйлер изобразил с помощью этих кругов:

$N$  - множество натуральных чисел,

$Z$  - множество целых чисел,

$Q$  - множество рациональных чисел,

$R$  - множество всех действительных чисел.



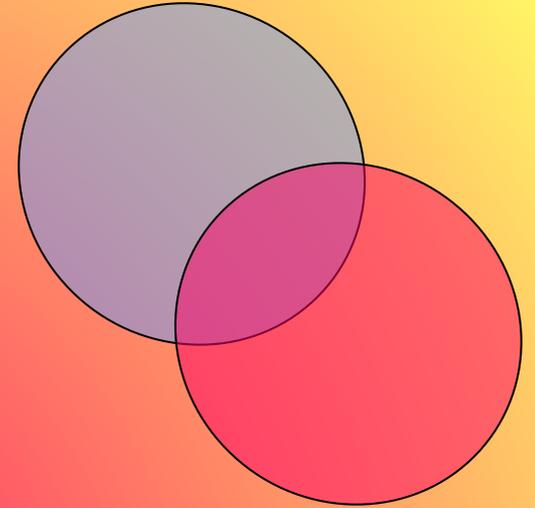
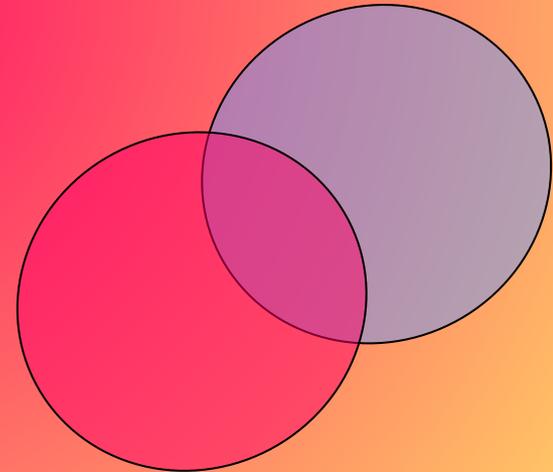
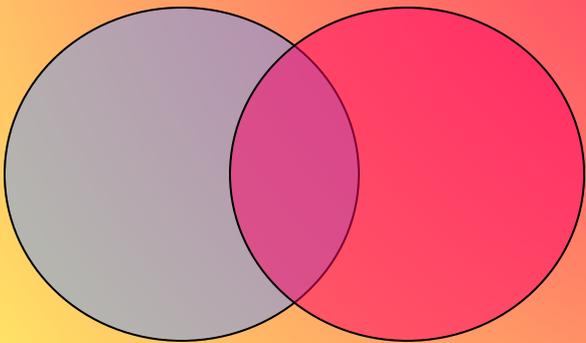
Ну а как же круги Эйлера помогают при решении задач?

# Круги Эйлера

Это новый тип задач, в которых требуется найти некоторое пересечение множеств или их объединение, соблюдая условия задачи.

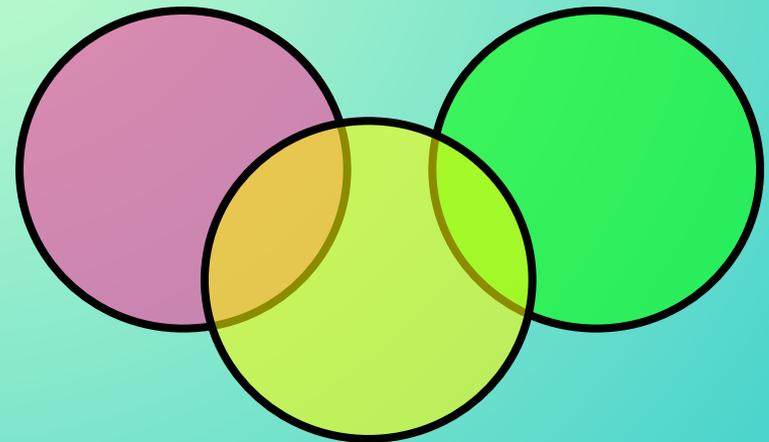
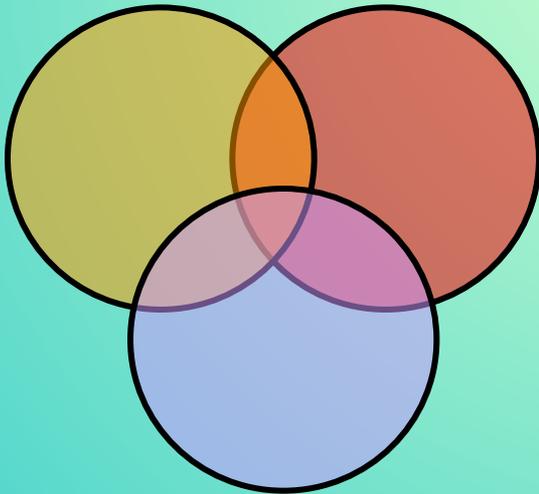
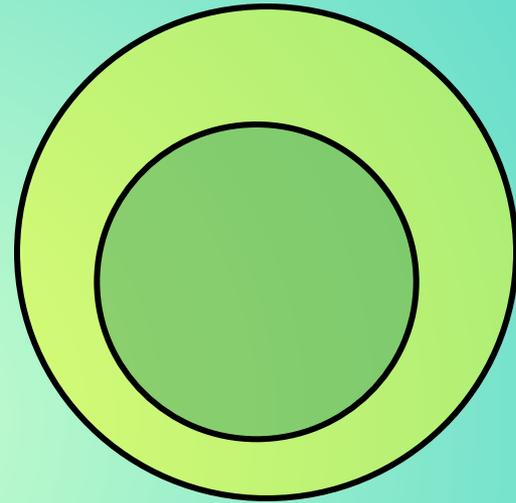
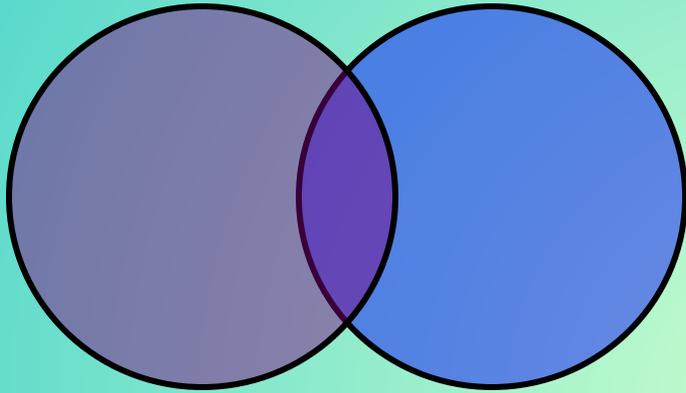


Круги ЭЙЛЕРА —  
геометрическая  
схема, с  
помощью  
которой можно  
изобразить  
отношения между  
подмножествами,  
для наглядного  
представления.





# Типы кругов Эйлера



# Решение задач

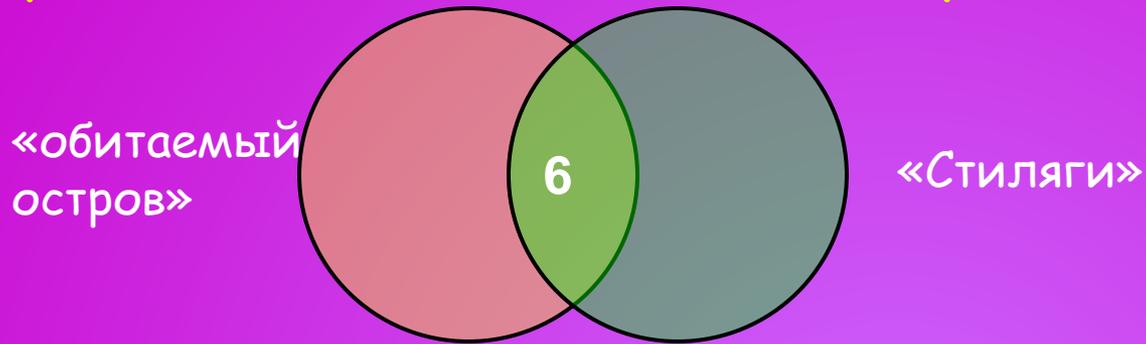
"Обитаемый остров" и "Стиляги"

Некоторые ребята из нашего класса любят ходить в кино. Известно, что 15 ребят смотрели фильм «Обитаемый остров», 11 человек - фильм «Стиляги», из них 6 смотрели и «Обитаемый остров», и «Стиляги». Сколько человек смотрели только фильм «Стиляги»?



# Решение

Чертим два множества таким образом:

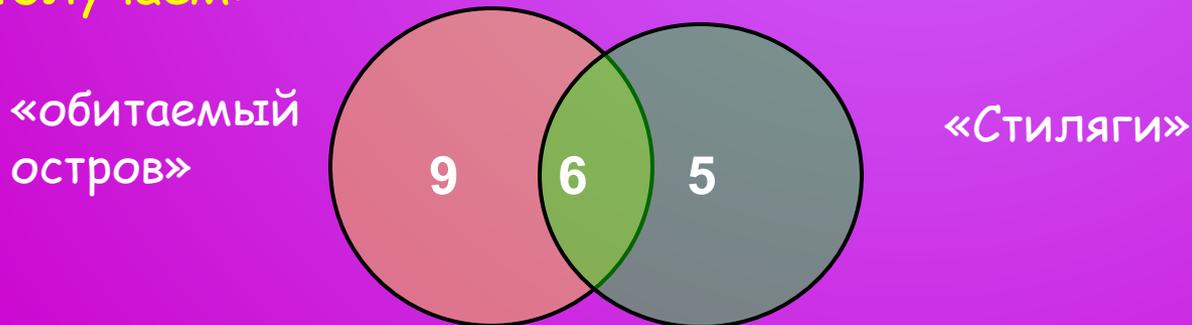


6 человек, которые смотрели фильмы «Обитаемый остров» и «Стиляги», помещаем в пересечение множеств.

$15 - 6 = 9$  – человек, которые смотрели только «Обитаемый остров».

$11 - 6 = 5$  – человек, которые смотрели только «Стиляги».

Получаем:



**Ответ 5 человек смотрели только «Стиляги».**

## «Мир музыки»

В магазин «Мир музыки» пришло 35 покупателей. Из них 20 человек купили новый диск певицы Максим, 11 - диск Земфиры, 10 человек не купили ни одного диска. Сколько человек купили диски и Максим, и Земфиры?

### Решение

Изобразим эти множества на кругах Эйлера.



Теперь посчитаем: Всего внутри большого круга 35 покупателей, внутри двух меньших  $35 - 10 = 25$  покупателей. По условию задачи 20 покупателей купили новый диск певицы Максим, следовательно,  $25 - 20 = 5$  покупателей купили только диск Земфиры. А в задаче сказано, что 11 покупателей купили диск Земфиры, значит  $11 - 5 = 6$  покупателей купили диски и Максим, и Земфиры:

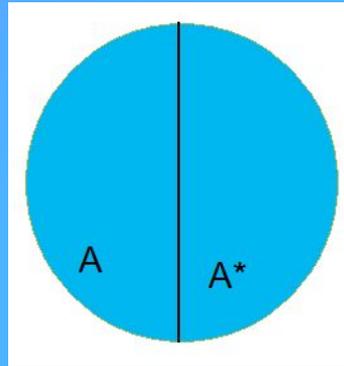
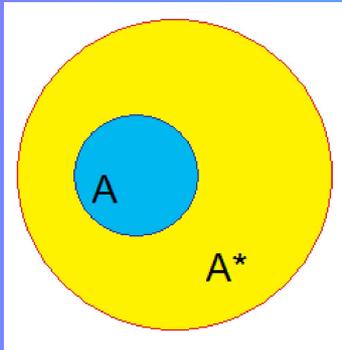


*Ответ: 6 покупателей купили диски и Максим, и Земфиры.*



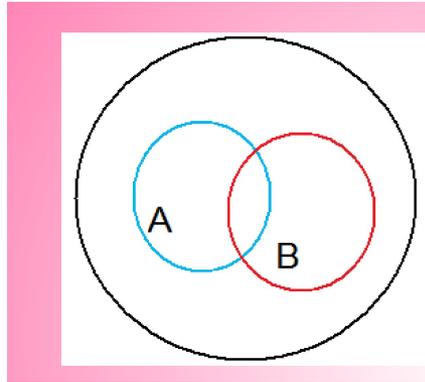
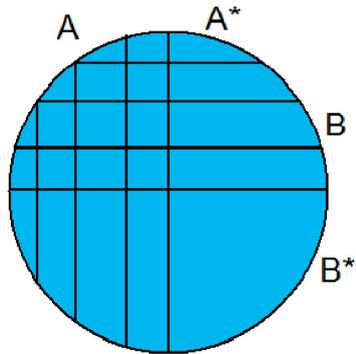
## Рассмотрение простейших случаев кругов Эйлера – Венна

а) Пусть дано некоторое множество и указано свойство  $A$ . Очевидно, элементы данного множества могут обладать или не обладать данным свойством. Поэтому данное множество распадается на две части, которые можно обозначить через  $A$  и  $A^*$ . На рисунке можно это изобразить двумя способами.



Большой круг изображает данное множество, маленький круг  $A$  – ту часть элементов данного множества, которое обладает свойством  $A$ , а кольцеобразная часть  $A^*$  – ту часть элементов, которые не обладают свойством  $A$ .

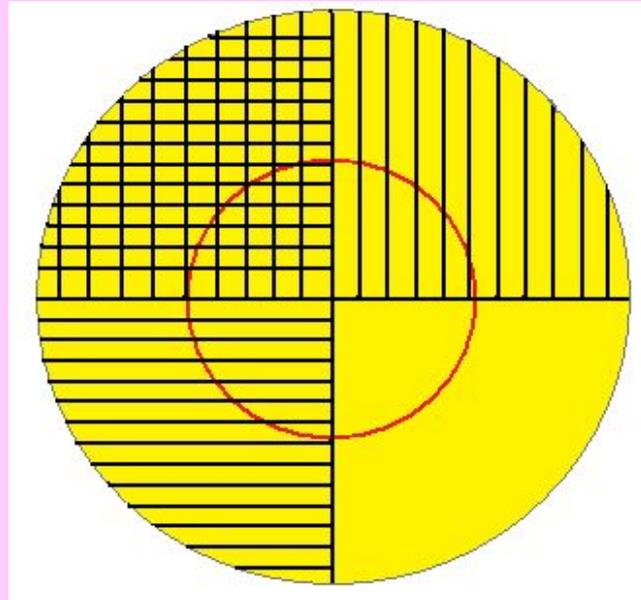
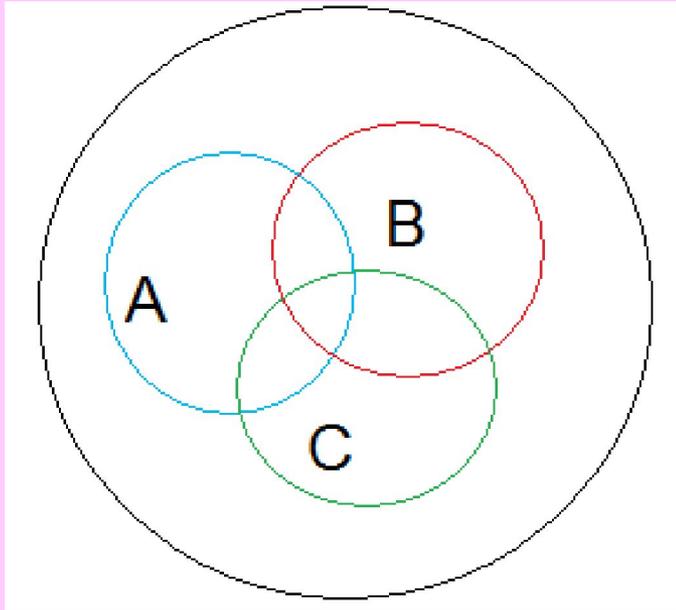
- б) Пусть дано некоторое множество и указаны два свойства:  $A$ ,  $B$ . Так как элементы данного множества могут обладать или не обладать каждым из этих свойств, то возможны четыре случая:  $AB$ ,  $AB^*$ ,  $A^*B$ ,  $A^*B^*$ . Следовательно, данное множество распадается на 4 подмножества. Это можно изобразить также двумя способами: в виде кругов или диаграмм.



На первом рисунке круг  $A$  – это подмножество тех элементов данного множества, которые обладают свойством  $A$ , а область вне круга, т.е. область  $A^*$ , - это подмножество тех элементов, которые свойством  $A$  не обладают. Аналогично круг  $B$  и область вне его.

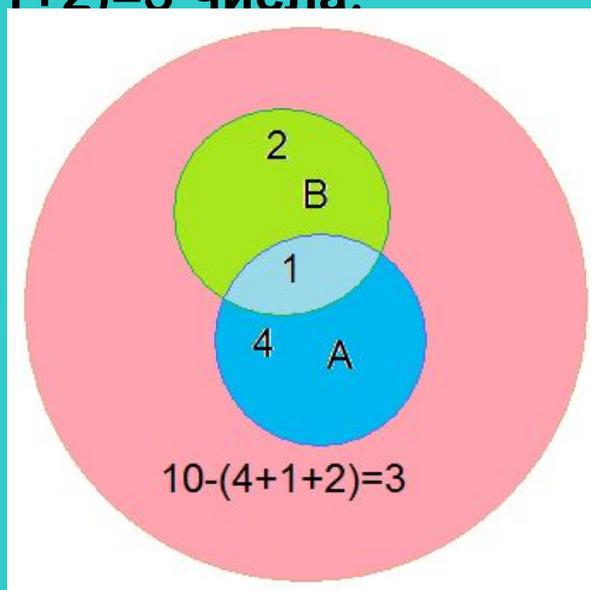
На втором рисунке подмножества  $A$ ,  $A^*$ ,  $B^*$ ,  $B$  изображены по-другому: подмножество  $A$  – это область слева от вертикально черты, а подмножество  $A^*$  - это область справа от этой черты. Аналогично изображены  $B$  и  $B^*$ : область  $B$  – это верхний полукруг, а область  $B^*$  - это нижний полукруг.

- в) Пусть дано некоторое множество и указаны три свойства: А, В, С. В этом случае данное множество распадается на восемь частей. Это можно изобразить двумя способами.

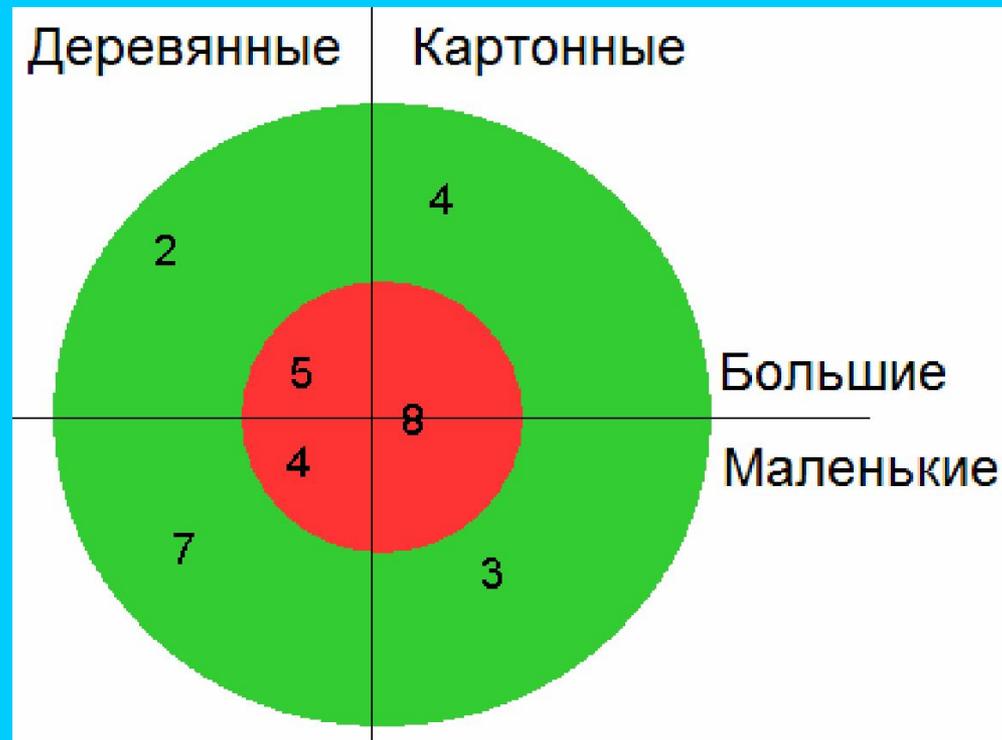


- Задачи, решаемые с помощью кругов Эйлера
- Задача №1. Сколько натуральных чисел из первого десятка не делится ни на 2, ни на 3?

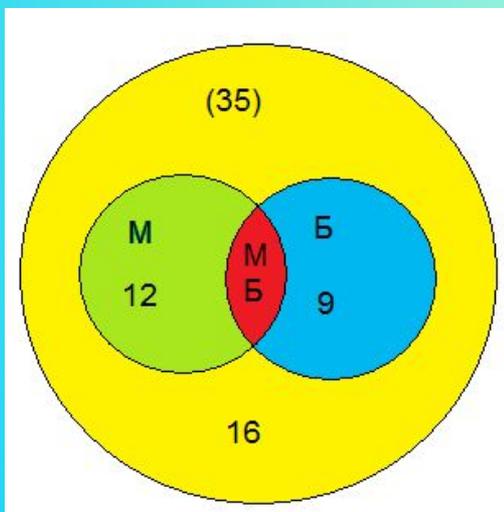
Решение. Для решения задачи удобно воспользоваться кругами Эйлера. В нашем случае три круга: большой круг – это множество чисел от 1 до 10, внутри большого – два меньших круга, пересекающихся друг с другом. Пусть множество чисел, кратных 2 – это множество А, а множество чисел, кратных 3 – множество В. Рассуждаем. На 2 делится каждое второе число. Значит, таких чисел будет  $10:2=5$ . На 3 делится 3 числа ( $10:3$ ). На 2 и 3 делятся те числа, которые делятся на 6. Такое число только одно. Поэтому множество А состоит из  $5-1=4$  чисел, множество В –  $3-1=2$  чисел. Отсюда следует, что в первом десятке содержится  $10-(4+1+2)=3$  числа.



- Задача № 2. Задача, решаемая с помощью диаграммы Эйлера – Венна.
- Ребятам поручили изготовить кубики. Несколько кубиков сделали из картона, а остальные из дерева. Кубики были двух размеров: большие и маленькие. Часть из них покрасили в зеленый цвет, другую – в красный. Получилось 16 зеленых кубиков. Зеленых кубиков большого размера было 6. Больших зеленых из картона было 4. Красных кубиков из картона было 8, красных кубиков из дерева – 9. Больших деревянных кубиков было 7, а маленьких деревянных кубиков было 11. Сколько же всего получилось кубиков?
- Решение. Выполняем рисунок.



- **Составление задач, имеющих практическое значение.**
- Задача 1. В классе 35 учеников. В математическом кружке из них 12 занимаются, в биологическом - 9, а 16 ребят не посещают эти кружки. Сколько биологов увлекаются математикой.
- Решение: Мы видим, что кружки посещают 19 ребят, так как  $35 - 16 = 19$ , из них 10 человек посещают только математический кружок ( $19 - 9 = 10$ ) и 2 биолога ( $12 - 10 = 2$ ) увлекаются математикой.
- Ответ: 2 биолога.
- С помощью кругов Эйлера легко увидеть и другой способ решения задачи.
- Количество учеников изобразим с помощью большого круга, а внутри поместим круги поменьше.

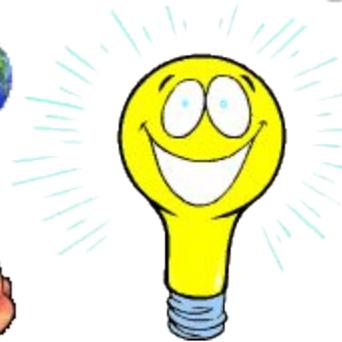


Очевидно, что в общей части кругов окажутся те самые биологи-математики, о которых спрашивается в задаче. Теперь посчитаем: Внутри большого круга 35 учеников, внутри кругов М и Б :  $35 - 16 = 19$  учеников, внутри круга М - 12 ребят, значит, в той части круга Б, которая не имеет ничего общего с кругом М, находится  $19 - 12 = 7$  учеников, следовательно, в МБ находится 2 ученика ( $9 - 7 = 2$ ). Таким образом, 2 биолога увлекаются математикой.

- 1)  $35 - 16 = 19$  (чел.);
- 2)  $12 + 9 = 21$  (чел.);
- 3)  $21 - 19 = 2$  (чел.).

Ответ: 2 биолога.

- Заполняем диаграмму.
- 1) Надо начинать с того подмножества, для которого указаны три свойства. Это большие зеленый кубики из картона – таких кубиков 4.
- 2) Далее ищем подмножества, для которого указаны два свойства из перечисленных трех. Это большие зеленые кубики – 6. Но это подмножество состоит из картонных и деревянных. Картонных было 4. Значит, деревянных  $6-4=2$ .
- 3) Больших деревянных кубиков 7. Из них зеленых – 2. Значит, красных будет  $7-2=5$ .
- 4) Красных деревянных кубиков 9., из них 5 – большие. Значит, маленьких красных кубиков из дерева будет  $9-5=4$ .
- 5) Маленьких деревянных кубиков 11. Из них красных – 4. Значит, маленьких зеленых кубиков из дерева  $11-4=7$ .
- 6) Всего зеленых кубиков 16. Зеленые кубики помещены в кольцеобразную часть, состоящую из четырех частей. Значит, маленьких зеленых кубиков из картона  $16-(4+2+7)=3$ .
- 7) Осталось последнее условие: красных кубиков из картона было 8. Нам и не надо узнать, сколько из них маленьких, сколько больших.
- 8) Считаем:  $2+5+8+4+4+7+3=33$ . Ответ: всего было изготовлено 33 кубика.





# ВЫВОД

В результате работы над данной темой я пришла к следующим выводам:

1. Все множества чисел связаны между собой так, что каждое следующее, более объемное, включает в себя предыдущее множество полностью;
2. Любое натуральное число является элементом любого следующего множества.
3. Применение кругов Эйлера (диаграмм Эйлера-Венна) позволяет легко решить задачи, которые обычным путем разрешимы лишь при составлении системы трех уравнений с тремя неизвестными.

# Литература

**«Математическая энциклопедия».**

**Для подготовки данной работы были использованы материалы с сайта**

**<http://minisoft.net.ru/>**

**[http://logika.vobrazovanie.ru/index.php?link=kr\\_e.html](http://logika.vobrazovanie.ru/index.php?link=kr_e.html)**

**[http://reshizadachu.ucoz.ru/index/krugi\\_ehjlera/0-18](http://reshizadachu.ucoz.ru/index/krugi_ehjlera/0-18)**