Элементы теории множеств

Понятие множества

Множество - это совокупность определенных различаемых объектов, причем таких, что для каждого можно установить, принадлежит этот объект данному множеству или нет

- Обычно множества обозначают большими буквами: A,B,X N ,…, а их элементы – соответствующими маленькими буквами: a,b,x,n…
- В частности, приняты следующие обозначения:
- $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел;
- $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел;
- $\mathbb{Q}$ – множество рациональных чисел;
- $\mathbb{R}$ – множество действительных чисел (числовая прямая).
- $\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел. И верно следующее:
- $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$

Как правило, элементы множества обозначаются маленькими буквами, а сами множества - большими. Принадлежность элемента **m** множеству **M** обозначается так: **m∈M**, где знак **∈** является стилизацией первой буквы греческого слова

$\in\sigma\tau\iota$ (есть, быть),

знак непринадлежности: $\notin$

- Множества могут быть конечными, бесконечными и пустыми.
- Множество, содержащее конечное число элементов, называется **конечным**.
- Если множество не содержит ни одного элемента, то оно называется **пустым** и обозначается Ø.

Например:

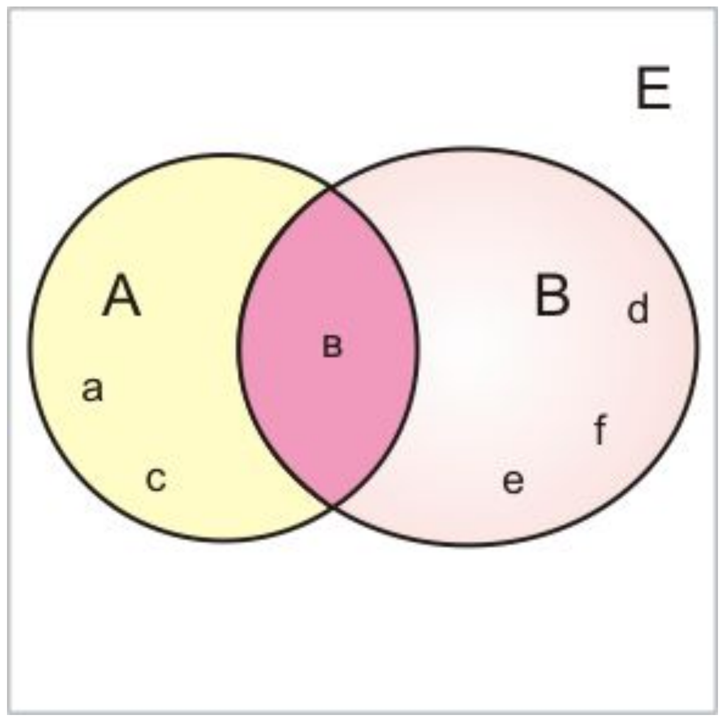
- множество студентов 1курса - конечное множество;
- множество звезд во Вселенной - бесконечное множество;
- множество студентов, хорошо знающих три иностранных языка (японский, китайский и французский), видимо, пустое множество.

Способы задания множеств

- Существуют три способа задания множеств:
- ***1) описание множества***
- Примеры: $Y=\{y | 1 \le y \le 10\}$ –множество значений *y* из отрезка [1;10]
- $X=\{x | x>2\}$ – множество всех чисел x, больших 2.
- ***2) перечисление множества***
- Примеры:
- A={а,б,в}- три начальные буквы русского алфавита
- $N=\{1,2,3\ldots\}$-натуральные числа
- ***3)графическое*** задание множеств происходит с помощью диаграмм Эйлера-Венна

- Заданы два множества: $A = \{a, b, c\}$ и $B = \{b, d, e, f\}$.

Если элементов множеств немного, то они могут на диаграмме указываться явно.



- Множество **A** называют подмножеством множества **B** (обозначается **A⊆B**), если всякий элемент множества **A** является элементом множества **B**:

$$A \subseteq B \leftrightarrow a \in A \rightarrow a \in B$$ см.рис 1.1

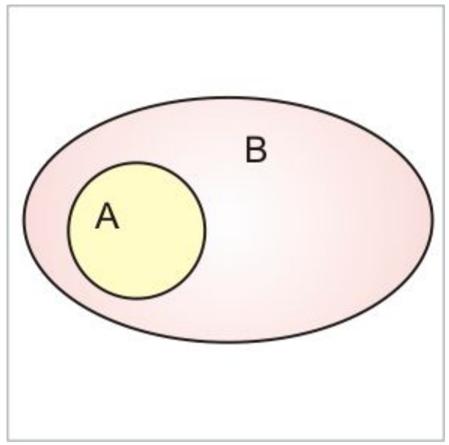


Рис. 1.1

При этом говорят, что B содержит A, или B покрывает A

Невключение множества C в множество B, обозначается так: $C \not\subset B$

- Множества А и В **равны** (А=В) тогда и только тогда, когда , $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, т. е. элементы множеств А и В совпадают.

- **Пример**: А={1,2,3}, В={3,2,1}, С={1,2,3,3}- равны. Множество С – это множество А, только в нем элемент 3 записан дважды.

- **Пример**: А={1,2}, В={1,2,3}- НЕ РАВНЫ
- Семейством множеств называется множество, элементы которого сами являются множествами.
- Пример: А={{∅},{1,2},{3,4,5}}- семейство, состоящее из трех множеств.

- Каждое непустое подмножество $A \neq \varnothing$ имеет по крайней мере два различных подмножества: само множество А и ∅.

- Множество A называется собственным подмножеством множества B, если $A \subseteq B$, а $B \not\subseteq A$. Обозначается так: $A \subset B$.
- Например, $B = \{a, b, c, d, e, f\}, A = \{a, c, d\}, A \subset B$

Принято считать, что пустое множество является подмножеством любого множества.

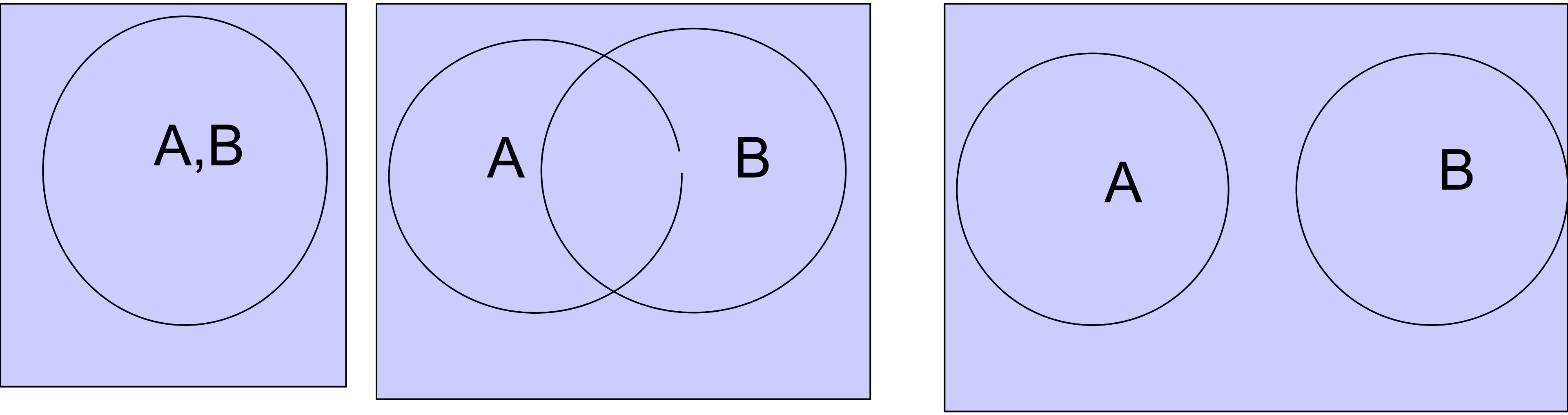
Мощностью конечного множества M называется число его элементов. Обозначается $|M|$

Например, $|B| = 6$. $|A| = 3$.

Операции над множествами

- **Объединением** (суммой) множеств A и B (обозначается $A \cup B$) называется множество C тех элементов, каждый из которых принадлежит хотя бы одному из множеств A или B. Возможны три случая:
- 1) A=B;
- 2) множества имеют общие элементы;
- 3) множества не имеют общих элементов.
- Примеры:
- 1) $A=\{1,2,3\}$, $B=\{1,2,3\}$, тогда $A \cup B=\{1,2,3\}$.
- 2) $A=\{1,2,3\}$, $B=\{2,3,4,5,6\}$, тогда $A \cup B=\{1,2,3,4,5,6\}$
- 3) $A=\{1,2,3\}$, $B=\{4,6,8\}$, тогда $A \cup B=\{1,2,3,4,6,8\}$

- Рассмотренные случаи наглядно проиллюстрированы на рисунке



- **Пересечением** множеств A и B называется новое множество C, которое состоит только из элементов одновременно принадлежащих, множествам A, B
- Обозначение $C=A\cap B$

- Возможны три случая:
- 1) A=B
- 2) множества имеют общие элементы
- 3) множества не имеют общих элементов.

- Примеры:
- 1)A={1,2,3}, B= {1,2,3}, тогда A∩B= {1,2,3}.
- 2)A={1,2,3}, B={2,3,4,5,6}, тогда A∩B={2,3}
- 3) A={1,2,3}, B={4,6,8}, тогда A∩B=∅

- **Разностью** множеств A и B называется множество C, состоящее из элементов принадлежащих только множеству A и не принадлежащих B.

- Обозначение: C=A\B

- Даны два множества:
- A={1,2,3,b,c,d},B={2,b,d,3}.
- Тогда:
- $A \cup B=\{1,2,3,b,c,d\}$
- B подмножество A
- A/B={1,c}
- $A \cap B=\{2,3,b,d\}$

- **Свойства**:
- 1. Коммутативность объединения $A \cup B = B \cup A$
- 2. Коммутативность пересечения $A \cap B = B \cap A$
- 3. Сочетательный закон $A \cup (B \cup C) = B \cup (A \cup C)$
- 4. То же и для пересечения.
- 5. Распределительный относительно пересечения
- $A \cap (B \cup C) = A \cap B \cup A \cap C$
- 6. Распределительный относительно объединения
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- 7. Закон поглощения $A \cup (A \cap B) = A$
- 8. Закон поглощения $A \cap (A \cup B) = A$
- 9. $A \cup A = A$
- 10. $A \cap A = A$

- **Декартовое (прямое) произведение A и B** - это новое множество C, состоящее из упорядоченных пар, в которых первый элемент пары берется из множества A, а второй из B.
- $A=\{1,2,3\}$
- $B=\{4,5\}$
- $C=A\times B = \{(1,4);(1,5);(2,4);(2,5);(3,4);(3,5)\}$
- Мощность декартова произведения равна произведению мощностей множеств A и B:
    - $|A \times B|=|A|\cdot|B|$

- $A \times B \neq B \times A$, кроме если $A=B$ (в этом случае равенство выполняется)
- Дано:
- Координатная числовая ось X.$x \in (-\infty, +\infty)$. Координатная числовая ось Y.$y \in (-\infty, +\infty)$.
- $D = X \times Y$
- Декартовое произведение двух осей - точка на плоскости.

- Рассмотрим декартовое произведение, которое обладает свойством коммутативности. A={Иванов, Петров}
- B={высокий, худой, сильный}
- A × B= {Иванов высокий, Иванов худой, Иванов сильный, Петров высокий, Петров худой, Петров сильный}