# Числовые ряды

Лекции 10,11

# Определение числового ряда

Рассмотрим некоторую числовую последовательность $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$ . Составим из членов этой последовательности бесконечную сумму

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$$

***Определение.*** Выражение (1)

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

называется числовым рядом, $u_n$ - общий член ряда.

# Примеры

- Рассмотрим ряд1-1+1-1+…+ $(-1)^n$+…
- Очевидно, сумма четного числа его членов равна нулю, а нечетного – единице. Такой ряд не имеет суммы.

# Примеры

Известно, что геометрическая прогрессия со знаменателем, меньшим единицы, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + .. + a_n + ...$ сходится, если $|a_n| < 1.$

# Понятие сходящегося ряда

***Опр.*** Конечные суммы $S_1 = u_1$ $, S_2 = u_1 + u_2$

$$S_3 = u_1 + u_2 + u_3, \ldots, S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n \ldots$$

называются частичными суммами ряда (1).

***Опр.*** Если существует конечный $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$,

то числовой ряд называется сходящимся, а число $S$ - суммой ряда. Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ равен бесконечности или вообще не существует, то ряд расходится.

# Пример сходящегося ряда

Показать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n-1)}$ сходится и найти его сумму.

Общий член ряда $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ .

Тогда $u_1 = 1 - \dfrac{1}{2}$, $u_2 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}$ , $u_3 = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4}$ ,…

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

$$+ \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}, \quad \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

# Свойства сходящихся рядов

1) Сходящиеся ряды можно почленно складывать, т.е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n).$$

2) Постоянный множитель можно вынести за знак ряда, т. е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} cu_n = c\sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

# Свойства сходящихся рядов

От сходящегося ряда можно отбросить конечное число членов или наоборот прибавить конечное число слагаемых и при этом сходимость ряда не изменится.

# Гармонический ряд

Исследуем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, называемый гармоническим.

Для решения задачи запишем гармонический ряд в развернутом виде:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{32}+\ldots$$

и наряду с ним рассмотрим ряд с меньшими членами

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots+\frac{1}{32}+\ldots$$

# Продолжение

Найдем частичные суммы второго ряда:

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2}; \quad S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2};$$

$$S_8 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + 3 \cdot \frac{1}{2};$$

$$S_{16} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + 4 \cdot \frac{1}{2}$$

$$S_{2^n} = 1 + n \cdot \frac{1}{2}.$$

Итак, гармонический ряд расходится, т. к. его сумма больше суммы вспомогательного ряда.

# Признаки сходимости ряда

***Необходимое условие сходимости ряда***.

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то $\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$

Если же $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд расходится.

# Пример расходящегося ряда

Пример 1. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5n+1}$ расходится, так как

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{5n+1} = \frac{1}{5} \neq 0$$

.

# Знакоположительные ряды

# Признак сравнения.

Пусть даны ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

Если ряд с большими членами сходится, то сходится и ряд с меньшими членами. Если же ряд с меньшими членами расходится, то расходится и ряд с большими членами.

# Признак сравнения в предельной форме

Если существует конечный и отличный от нуля $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=A$, то

ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ сходятся или

расходятся одновременно.

# Примеры

В качестве рядов для сравнения берут гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, который

расходится, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ или $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ ,о которых известно, что первый сходится, а второй при p>1сходится, а при p≤1 расходится.

# Примеры

Исследовать на сходимость ряды
а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+4}$ и б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ .

Найдем предел отношения членов данного ряда и ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ ,с которым сравниваем данный ряд.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1\cdot n^2}{(n^2+1)\cdot 1}=1$. Ряд сходится.

# Примеры

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ сравниваем с гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ .

Так как $\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{n}$ , то данный ряд расходится вместе с гармоническим рядом.

# Признак Даламбера

Если существует конечный $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, то

1)при $\ell < 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, где $u_n > 0$, сходится,

2)при $\ell > 1$ ряд расходится,

3)при $\ell = 1$ признак ответа не дает.

# Примеры

Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{e^n}$

Так как $u_n = \frac{2n}{e^n}$, то $u_{n+1} = \frac{2(n+1)}{e^{n+1}}$ и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)e^n}{e^{n+1}2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{en} = \frac{1}{e} \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{e}.$$

Так как $\frac{1}{e} < 1$, то данный ряд сходится.

# Признак Коши

Если существует конечный $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = e$, то

1) при $e<1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, где $u_n > 0$, сходится,

2) при $e>1$ ряд расходится,

3) при $e=1$ признак ответа не дает.

# Примеры

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{n+2}\right)^n$ исследуем с помощью признака Коши.

Вычислим $\sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{3n+1}{n+2}\right)^n} = \frac{3n+1}{n+2}$ .

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{n+2} = 3 > 1$

и ряд согласно признаку Коши расходится.

# Интегральный признак

Пусть члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ положительны и $u_n > u_{n+1}$ при $\forall n \in N$. Пусть функция $f(x)$ при $x = n$ имеет значения $f(n) = u_n$, положительна и монотонно убывает при $x > 1$. Тогда числовой ряд сходится или расходится вместе с несобственным интегралом

$$\int_{1}^{+\infty} f(x)dx$$

# Обобщенный гармонический ряд

Исследуем ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ .

Функция $f(x)=\frac{1}{x^p}$ монотонно убывает.

Несобственный интеграл

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^p}=\int_1^{\infty}x^{-p}dx=\left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_1^{\infty}=\frac{1}{1-p}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^{p-1}}-1\right)=$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{p-1}, & p>1\\ \infty, & p<1\end{cases}$$

.Ряд расходится при *p*<1
и сходится при *p*>1 .

# Пример

Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$$

. Члены ряда $u_n = \dfrac{1}{n\sqrt{\ln n}}$

положительны и монотонно убывают.

Функция $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{\ln x}}$, очевидно, также

положительна при $x \geq 2$ и монотонно убывает.

# Продолжение

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}=\lim_{b\to+\infty}\int_2^{b}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}=\lim_{b\to+\infty}\int_0^{b}\frac{d(\ln x)}{\sqrt{\ln x}}=\lim_{b\to+\infty}2\sqrt{\ln x}\Big|_2^b=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}2\sqrt{\ln b}-2\sqrt{\ln 2}=+\infty \quad .$$

Несобственный интеграл, а вместе с ним и числовой ряд расходятся.

# Знакопеременные ряды

# Признак Лейбница

Пусть члены знакочередующегося ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n-1}u_n + \ldots$$

удовлетворяют условиям:

1) $u_1 > u_2 > u_3 > \ldots > u_n > \ldots$

и 2) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Тогда знакочередующийся ряд сходится, причём его сумма $S$ не превосходит его первого члена, т.е. $S < u_1$.

# Примеры

Исследовать на сходимость ряды:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n+1}$, 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n+2}$ .

1) члены знакочередующегося ряда

$$u_1=\frac{1}{2},u_2=\frac{1}{3},u_3=\frac{1}{4},..,u_{n+1}=\frac{1}{n+1},..$$

монотонно убывают и $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$ .

Согласно признаку Лейбница ряд сходится.

# Примеры

2) общий член ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n+2}$ не стремится к нулю, так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+2}=1$$

Следовательно, ряд расходится согласно необходимому признаку.

# Достаточный признак сходимости знакопеременного ряда

Если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ , то

знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ также сходится.

# Абсолютно сходящийся ряд

***Определение.***

Если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$, то знакопеременный ряд называется абсолютно сходящимся.

ВГУЭС

# Условно сходящийся ряд

***Определение.***

Если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ расходится, то знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ называется условно сходящимся.

# Пример

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}$ абсолютно сходится, т.к. ряд из модулей его членов $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n+1}$ сходится условно, т.к. он согласно признаку Лейбница сходится, но ряд из модулей его членов, т.е. ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ расходится вместе с гармоническим рядом .

# Остаток ряда и его оценка

***Определение.*** Если числовой ряд сходится, то разность $R_n = S - S_n$ называется *n*-м остатком ряда. Таким образом, $R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots$ представляет собой сходящийся ряд. При этом $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = \lim\limits_{n\to\infty}(S - S_n) = S - S = 0$ .

***Теорема***. Если знакочередующийся ряд сходится, то $\left|R_n\right| < u_{n+1}$ .