Систематическое интегрирование

Содержание

Некоторые сведения о многочленах

Понятие многочлена

Функция $P_n(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n$, где *n*–целое число, называется многочленом или рациональной целой функцией от *x*. Число *n* называют степенью многочлена. Коэффициенты $A_0, A_1, \ldots, A_n$ –это действительные или комплексные числа. Независимая переменная *x* также может быть как действительным, так и комплексным числом.

Теорема Безу

Число *а* является корнем многочлена $P_n(x)$ тогда и только тогда, когда многочлен делится на *x*–*a* без остатка.

Доказательство

Если многочлен степени *n* разделить на *x*–*a*, то очевидно в частном получится многочлен степени $n-1$, а в остатке от деления число, то есть

(*) $$P_n(x)=(x-a)Q_{n-1}(x)+r$$

Тогда если *x*=*a*–корень многочлена , то $P_n(a)=0$ и, подставляя *x*=*a*, в обе части равенства (*), получим *r*=0.

Доказательство

Обратно, если *r*=0, то при *x*=*a* правая часть (*) $P_n(x)=(x-a)Q_{n-1}(x)+r$ обращается в нуль, тогда и $P_n(a)=0$,

то есть *x*=*a*–корень .

Из теоремы Безу следует, что если *x*=*a*–корень многочлена, то

$$P_n(x)=(x-a)Q_{n-1}(x)$$

Теоремы алгебры

Теорема .Всякий многочлен $P_n(x)$ степени $n \geq 1$ имеет по крайней мере один корень.

Теорема. Всякий многочлен степени *n* разлагается на *n* линейных множителей вида $x - a$ и множитель, равный коэффициенту при x^n.

$$P_n(x) = A_0(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n)$$

Случай кратных действительных корней

Если в разложении многочлена на множители некоторые линейные множители окажутся одинаковыми, то их можно объединить, и тогда разложение многочлена на множители будет иметь вид:

$$P_n(x) = A_o(x - a_1)^{k_1}(x - a_2)^{k_2}\ldots(x - a_m)^{k_m}$$

При этом $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$. В этом случае корни $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_m$ называются корнями кратности $k_1,\ k_2\ ,\ \ldots,\ k_m$ соответственно.

Пример

$$P(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x-2)(x-2)(x-1) =$$

. $= (x-2)^2(x-1)$

Корень $a_1 = 2$ –двукратный корень этого многочлена, $a_2 = 1$ –простой корень.

Случай комплексных корней

Теорема. Всякий многочлен *n*–ой степени имеет ровно *n* корней (действительных или комплексных).

Теорема. Если многочлен с действительными коэффициентами имеет комплексный корень $a+bi$, то он имеет и сопряженный корень $a-bi$.

Продолжение

Итак, в разложении многочлена на множители комплексные корни входят попарно сопряженными.Им соответствует множитель вида

$$\left[x-(a+bi)\right]\left[x-(a-bi)\right]=$$

$$=\left[(x-a)-bi\right]\left[(x-a)+bi\right]=(x-a)^2+b^2=$$

$$=x^2-2ax+a^2+b^2=\mathrm{x}^2+px+q,$$

где дискриминант отрицателен.

Случай кратных комплексных корней

Если комплексные корни многочлена являются кратными, то этот многочлен с действительными коэффициентами разлагается на множители согласно формуле

$$P_n(x) = A_o (x - a_1)^{k_1} (x - a_2)^{k_2} \ldots (x - a_r)^{k_r} \cdot$$

$$\cdot (x^2 + p_1 x + q_1)^{e_1} \ldots (x^2 + p_s x + q_s)^{e_s}$$

где $$k_1 + k_2 + \ldots + k_r + 2e_1 + \ldots + 2e_s = n$$

Интегрирование рациональных дробей

Рациональные дроби

Рациональной дробью называется выражение вида $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x), Q_m(x)$ - многочлены степеней *n* и *m* соответственно. Если степень числителя ниже степени знаменателя, то рациональная дробь называется правильной, в противном случае - неправильной.

Рациональные дроби

Если рациональная дробь является неправильной, то произведя деление $P(x)$ на $Q(x)$ по правилу деления многочленов, ее можно представить в виде $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \dfrac{P_1(x)}{Q(x)}$, где $R(x)$ - некоторый многочлен, а $\dfrac{P_1(x)}{Q(x)}$ - правильная рациональная дробь.

Простейшие рациональные дроби

Правильные рациональные дроби вида

$$I.\ \frac{A}{x-a},\ II.\ \frac{A}{(x-a)^k},\ III.\ \frac{Ax+B}{x^2+px+q},\ IV.\ \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$$

где *k*–целое положительное число ≥2, дискриминант квадратного трехчлена

x^2+px+q отрицателен, называются простейшими дробями *I, II, III* и *IV* типов.

Интегрирование простейших рациональных дробей

Дробь 1-го типа:

$$\int \frac{dx}{x+4} = \int \frac{d(x+4)}{x+4} = \ln|x+4| + C.$$

Дробь 2-го типа:

$$\int \frac{dx}{(3x+1)^5} = \frac{1}{3}\int (3x+1)^{-5} d(3x+1) =$$

$$= \frac{1}{3}\frac{(3x+1)^{-4}}{-4} + C = \frac{1}{-12(3x+1)^4} + C.$$

Пример интегрирования рациональной дроби

Найдем $\int \frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x}dx$

Разложим знаменатель дроби на множители: $x^3+4x^2+4x = x(x^2+4x+4) = x(x+2)^2.$

Тогда $\frac{3x^2+8}{x(x+2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}.$

Приведем дроби к общему знаменателю и освободимся от знаменателя.

Продолжение

$$3x^2+8=A(x+2)^2+Bx(x+2)+Cx.$$

Положим в обеих частях этого тождества x=0. Получим 8=4A. Тогда A=2. При x=-2 20=-2C, а C=-10. Приравнивая коэффициенты при x^2 в обеих частях тождества, получаем 3=A+B, а так как A=2 , то B=1. Имеем

Продолжение

$$\int \frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x}dx = 2\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x+2} - 10\int \frac{dx}{(x+2)^2} =$$

$$= 2\ln|x| + \int \frac{d(x+2)}{x+2} - 10\int (x+2)^{-2}\, d(x+2) =$$

$$= 2\ln|x| + \ln|x+2| + 10\frac{1}{x+2} + C.$$

Пример интегрирования рациональной дроби

Вычислить $\int \frac{x^3 - 2x}{(x^2+1)^2} dx$

$$\frac{x^3 - 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{(x^2+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

Приведем выражение к общему знаменателю: .

$$\frac{x^3 - 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B+(Cx+D)(x^2+1)}{(x^2+1)^2}$$

Продолжение

Приравняем числители
$$x^3 - 2x = Ax + B + Cx^3 + Dx^2 + Cx + D$$.
Многочлены, стоящие в правой и левой частях этого соотношения тождественно равны, т. е. равны коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях последнего соотношения.

Продолжение

$$x^3 - 2x = Ax + B + Cx^3 + Dx^2 + Cx + D$$

$$\begin{array}{c|c}
x^3 & 1 = C \\
x^2 & 0 = D \\
x & -2 = A + C \\
x^0 & 0 = B + D
\end{array}$$

Отсюда получаем: *C*=1, *D*=0, *A*=-3, *B*=0. Следовательно, подставляя найденные коэффициенты в разложение дроби на простейшие, получим

Продолжение

$$\int \frac{x^3 - 2x}{(x^2+1)^2}dx = \int \frac{-3xdx}{(x^2+1)^2} + \int \frac{xdx}{x^2+1} =$$

$$= -\frac{3}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} =$$

$$= \frac{3}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C.$$

Интегрирование тригонометрических функций

Интегралы вида

$$\int \sin^m x \cos^n x dx$$

Если хотя бы одно из чисел m или n - нечетное положительное число, то отделяя от нечетной степени один сомножитель и выражая с помощью формулы $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ оставшуюся четную степень через дополнительную функцию, приходим к табличному интегралу.

Примеры

Вычислить $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx$.

Отделим от нечетной степени косинуса один множитель, внесем под знак дифференциала синус и получим:

$$\int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x} d(\sin x) = \int \frac{d(\sin x)}{\sin^2 x} - \int d(\sin x) =$$

$$= \int \sin^{-2} x d(\sin x) - \sin x = \frac{\sin^{-1} x}{-1} - \sin x + C =$$

$$= -\frac{1}{\sin x} - \sin x + C.$$

Продолжение

2. ***Интегралы вида*** $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx,$ где *m* и *n* – четные положительные числа, вычисляют с помощью формул понижения степени:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2},$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2},$$

$$\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x.$$

Пример

$$\int \sin^2 x \cos^2 x dx = \frac{1}{4}\int \sin^2 2x dx = \frac{1}{4}\int \frac{1-\cos 4x}{2} dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int (1-\cos 4x) dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

Продолжение

3.Интегралы вида

$$\int \sin kx \sin mx dx, \ \int \sin kx \cos mx dx, \ \int \cos kx \cos mx dx$$

вычисляют преобразованием произведения тригонометрических функций в сумму по формулам:

$$\sin kx \sin mx = \frac{1}{2}(\cos(k-m)x - \cos(k+m)x),$$

$$\sin kx \cos mx = \frac{1}{2}(\sin(k-m)x + \sin(k+m)x),$$

$$\cos kx \cos mx = \frac{1}{2}(\cos(k-m)x + \cos(k+m)x).$$

Пример

Рассмотрим пример:

$$\int \sin 10x \sin 15x dx = \frac{1}{2}\int (\cos(-5x)dx - \cos 25x)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \cos 5x dx - \frac{1}{2}\int \cos 25x dx =$$

$$= \frac{1}{10}\sin 5x - \frac{1}{50}\sin 25x + C.$$

Продолжение

4. Интегралы $\int tg^m x dx, \quad \int ctg^m x dx$, где $\quad m \in N$ вычисляют заменой

$$tgx = t, \; x = arctgt, \; dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Второй интеграл берут с помощью подстановки *t=ctgx.*

Пример

Вычислим:

$$\int tg^3 x dx = \int \frac{t^3}{1+t^2} dt = \int \frac{t^3 + t - t}{1+t^2} dt =$$

Разложим интеграл на два интеграла.. Получим

$$= \int \frac{t^3 + t}{1+t^2} dt - \int \frac{t}{1+t^2} dt = \int t dt - \frac{1}{2} \int \frac{d(t^2+1)}{1+t^2} =$$

$$= \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} \ln(1+t^2) + C = \frac{tg^2 x}{2} - \frac{1}{2} \ln(1 + tg^2 x) + C.$$

Продолжение

5.Такой же заменой можно брать интегралы $\int \frac{dx}{\sin^m x \cos^n x}$, n, m –целые числа

одинаковой четности. Например,

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int \frac{d(tgx)}{\cos^2 x} = \left| \begin{array}{l} tgx = t \\ \cos^2 x = \dfrac{1}{1 + tg^2 x} \end{array} \right| =$$

$$= \int (1 + t^2) dt = t + \frac{t^3}{3} + C = tgx + \frac{tg^3 x}{3} + C.$$

Универсальная подстановка

6. Интегралы $\int R(\sin x, \cos x)dx$ берут с помощью универсальной подстановки $tg\frac{x}{2} = t.$ Откуда

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Например,

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{2dt}{1+t^2} \cdot \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C.$$

Продолжение

– 7. ***Универсальная подстановка приводит к громоздким выкладкам***! Поэтому если ***R(sinx,cosx)=R(-sinx,-cosx), то удобнее пользоваться подстановкой tgx=t.***

Тогда

$$tgx = t,\ \ x = arctgt,\ \ dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Пример

$$\int \frac{dx}{1+\sin^2 x} = \int \frac{dt}{(1+t^2)(1+\frac{t^2}{1+t^2})} = \int \frac{dt}{1+2t^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d(\sqrt{2}t)}{1+(t\sqrt{2})^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} arctg(t\sqrt{2}) + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} arctg(\sqrt{2}tgx) + C.$$

Интегрирование простейших иррациональностей

Иррациональность, содержащая квадратный трехчлен

1.Интегралы вида $\int \frac{(ax+b)dx}{\sqrt{mx^2+nx+p}}$ берут, выделяя полный квадрат и вводя новую переменную.

$$\int \frac{3x-6}{\sqrt{x^2-4x+5}}dx = \int \frac{3(x-2)}{\sqrt{(x-2)^2+1}}dx = 3\int \frac{tdt}{\sqrt{t^2+1}} =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{d(t^2+1)}{\sqrt{t^2+1}} = 3\sqrt{t^2+1}+C = 3\sqrt{x^2-4x+5}+C.$$

Продолжение

2. Интегралы вида $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ вычисляют с помощью подстановки

$$\frac{ax+b}{cx+d} = z^n.$$

Интегралы вида $\int R\left(x, \sqrt[m]{ax+b}, \sqrt[k]{ax+b}\right)dx$ вычисляют с помощью подстановки

$$ax+b = z^n,$$

где *n*–наименьшее общее кратное чисел *m* и *k*.

Тригонометрические подстановки

Интегралы вида

$$\int R(x,\sqrt{a^2-x^2})dx,\ \ \int R(x,\sqrt{a^2+x^2})dx,\ \ \int R(x,\sqrt{x^2-a^2})dx$$

вычисляют с помощью тригонометрических подстановок.

1. $$\int R(x,\sqrt{a^2-x^2})dx;\quad x=a\sin z,\quad dx=a\cos z dz,$$

$$\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2 z}=a\sqrt{1-\sin^2 z}=a\cos z.$$

Тригонометрические подстановки

2. $\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2})dx, \quad x = atgz, \quad dx = \dfrac{adz}{\cos^2 z},$

$$\sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{a^2 + a^2 tg^2 z} = a\sqrt{1 + tg^2 z} = \frac{a}{\cos^2 z}.$$

3. $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2})dx, \quad x = \dfrac{a}{\cos z}, \quad dx = \dfrac{a \sin z dz}{\cos^2 z},$

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 z} - a^2} = a\sqrt{\frac{1 - \cos^2 z}{\cos^2 z}} = a\frac{\sin z}{\cos z} = atgz.$$

Пример

$$\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}dx = \left| \begin{matrix} x = tgz, dx = \dfrac{dz}{\cos^2 z} \\ \sqrt{x^2+1} = \sqrt{tg^2+1} = \dfrac{1}{\cos z} \end{matrix} \right| = \int \frac{dz}{\cos z tg^2 z \cos^2 z} =$$

$$= \int \frac{dz}{\cos z \sin^2 z} = \int \frac{\sin^2 z + \cos^2 z}{\cos z \sin^2 z}dz = \int \frac{dz}{\cos z} + \int \frac{\cos z}{\sin^2 z}dz =$$

$$= \int \frac{\cos z dz}{\cos^2 z} + \int \sin^{-2} z d(\sin z) = \int \frac{d(\sin z)}{1-\sin^2 z} - \frac{1}{\sin z} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin z}{1-\sin z}\right| - \frac{1}{\sin z} + C =$$

$$= \left| \sin z = \frac{tgz}{\sqrt{tg^2 z + 1}} \right| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}-x}\right| - \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} + C.$$

ВГУЭС