Линейные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами

Лекция 6

Вывод формул общего решения ЛОУ 2-го порядка

Корни характеристического уравнения

$$k_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Случай 1. Если $\frac{p^2}{4} - q > 0$, то характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня $k_1 \neq k_2 \in R$

В этом случае общее решение имеет вид

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}.$$

Продолжение

Случай 2. Если $\frac{p^2}{4} - q = 0$, то характеристическое уравнение имеет одинаковые корни $k_1 = k_2 = k$.

Частные решения ЛОУ выбираем так, чтобы они были линейно независимыми:

$y_1 = e^{kx}$ и $y_2 = xe^{kx}$.

Общее решение ЛОУ 2-го порядка будет иметь вид $y = e^{kx}(C_1 + xC_2)$.

Продолжение

Случай 3. Если $\frac{p^2}{4} - q < 0$, то характеристическое уравнение имеет два комплексно-сопряженных корня

$k_1 = \alpha + \beta i$ и $k_2 = \alpha - \beta i$, где $\alpha = -\frac{p}{2}$

и $\beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$.

Общее решение ЛОУ 2-го порядка в действительной форме можно записать в виде $y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

Общее решение ЛОУ 2-го порядка в зависимости от корней характеристического уравнения

1. Если $k_1 \neq k_2 \in R$, то $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$
2. Если $k_1 = k_2 = k$, то $y = e^{x}(C_1 + xC_2)$
3. Если $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, то

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

4. Если $k_{1,2} = \pm \beta i$, то

$$y = C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x$$

Пример

Найти общее решение уравнения

$$y'' + y' - 12y = 0.$$

Составим характеристическое уравнение $y'' + y' - 12y = 0$. Его корни действительны и различны: $k_1 = -4, k_2 = 3$.
Поэтому общее решение

$$y = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{3x}$$

Пример

Решить уравнение *y''+4y'+4y =0*.
Характеристическое уравнение

$$k^2 + 4k + 4 = 0$$

имеет два кратных корня $k_{1,2} = -2$,
поэтому искомое общее решение

$$y = e^{-2x}(c_1 + c_2 x) \cdot$$

Пример

Решить уравнение *y''+4y'+13y =0.*

Составим характеристическое уравнение $k^2+4k+13=0$. Корни этого уравнения $k_{1,2}=-2\pm\sqrt{4-13}=-2\pm 3i$ комплексно-сопряженные. Общее решение исходного уравнения:

$$y=e^{-2x}(c_1\cos 3x+c_2\sin 3x)$$.

Теорема о структуре общего решения линейного дифференциального уравнения 2-го порядка

Общее решение уравнения

$$y''+py'+qy = f(x),$$

где p и q постоянные, а $f(x)\neq 0$, равно сумме общего решения однородного уравнения $y''+py'+qy = 0$ и какого-нибудь частного решения неоднородного уравнения, т. е.

$$y = y_0 + \tilde{y} \quad .$$

Подбор частного решения ЛНОУ по виду правой части методом неопределенных коэффициентов

1. Пусть $f(x) = ae^{mx}$. Тогда частное решение ищут в виде:

а)если $k_1 \neq m, \quad k_2 \neq m$, то $\tilde{y} = Ae^{mx}$

б)если $k_1 = m, \quad k_2 \neq m$, то $\tilde{y} = xAe^{mx}$

в)если $k_1 = m, \quad k_2 = m$, то $\tilde{y} = x^2 Ae^{mx}$

Продолжение

2. Пусть $f(x) = P_n(x) \cdot e^{mx}$, где $P_n(x)$ - заданный многочлен . Тогда частное решение уравнения ищут в виде:

а)если $k_1 \neq m, k_2 \neq m$, то $\tilde{y} = Q_n(x) \cdot e^{mx}$

б)если $k_1 = m, k_2 \neq m$, то $\tilde{y} = xQ_n(x) \cdot e^{mx}$

в)если $k_1 = k_2 = m$, то $\tilde{y} = x^2 Qn(x) \cdot e^{mx}$,

где $Q_n(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_{n-1} x + A_n$

-многочлен с неопределенными коэффициентами.

В правой части уравнения-многочлен

1.Пусть $f(x) = P_n(x)$, где $P_n(x)$ - заданный многочлен. Это частный случай $f(x) = P_n(x) \cdot e^{mx}$ при m=0. Тогда

а)если $k_1 \neq 0, k_2 \neq 0$, то $\tilde{y} = Q_n(x)$;

б)если $k_1 = 0, k_2 \neq 0$, то $\tilde{y} = xQ_n(x)$;

в)если $k_1 = k_2 = 0$, то $\tilde{y} = x^2 Q_n(x)$.

В правой части уравнения-тригонометрический полином

5. Пусть $f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x)$ где степени многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ вообще говоря различны. Тогда

а)если $k_{1,2} \neq \alpha \pm \beta i$, то частное решение ищут в виде

$$\tilde{y} = e^{\alpha x}(T_l(x)\cos\beta x + R_l(x)\sin\beta x)$$

где степени многочленов $T_l(x)$ и $R_l(x)$ равны $l = \max(n, m)$.

Продолжение

б)если $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, то частное решение ищут в виде:

$$\tilde{y} = xe^{\alpha x}(T_l(x)\cos\beta x + R_l(x)\sin\beta x)$$

Пример: указать вид частного решения уравнения $y'' + 2y' + 5y = xe^{-x}\sin 2x$.

Характеристическое уравнение

$k^2 + 2k + 5 = 0$ имеет:*Д*=-16 и корни

$k_{1,2} = \dfrac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i$, а решение имеет вид

$$\tilde{y} = xe^{-x}((Ax + B)\cos 2x + (Cx + D)\sin 2x)$$

Решить уравнение $y'' + 3y' + 2y = 3e^{2x}$.
$k^2 + 3k + 2 = 0$. Корни этого уравнения
$k_1 = -1, k_2 = -2$ действительны и различны, поэтому общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид $y_0 = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$.
Составим частное решение неоднородного уравнения по виду правой части: $f(x) = 3e^{2x}$.

Продолжение

Среди корней характеристического уравнения нет равных числу m =2. Поэтому ищем $\tilde{y}$ в виде: $\tilde{y} = Ae^{2x}$, где А – неопределенный коэффициент .

$\tilde{y}' = Ae^{2x}2,\ \tilde{y}'' = Ae^{2x} \cdot 2^2$. Подставим

$\tilde{y}, \tilde{y}', \tilde{y}''$ в уравнение. Имеем

$4Ae^{2x} + 3A \cdot 2e^{2x} + 2Ae^{2x} = 3e^{2x}$. Далее имеем 12A=3 и A= ¼.

$$\tilde{y} = \frac{1}{4}e^{2x}, \quad y = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x} + \frac{1}{4}e^{2x}$$