

Кривые второго порядка

Лекция 11

Кривой второго порядка называется линия, определяемая уравнением второй степени относительно текущих координат x и y .

Окружность

Окружностью называется множество точек плоскости, равноудаленных от одной и той же точки плоскости, называемой центром окружности.

Уравнение окружности

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

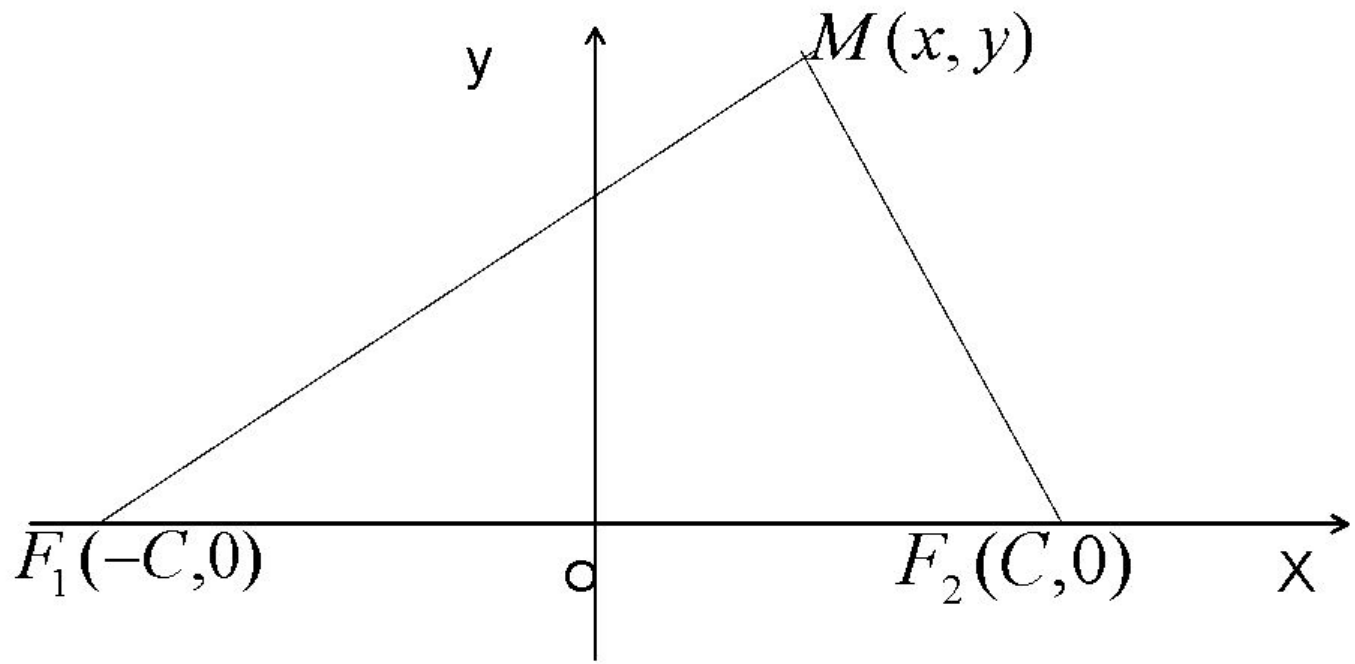
$(x_0; y_0)$ – абсцисса и ордината центра окружности

R – радиус окружности

Эллипс

Эллипсом называется геометрическое место точек (плоскости), сумма расстояний которых от двух данных точек, называемых фокусами этого эллипса, есть величина постоянная.

•



$$|MF_1| + |MF_2| = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$a \geq b > 0$$

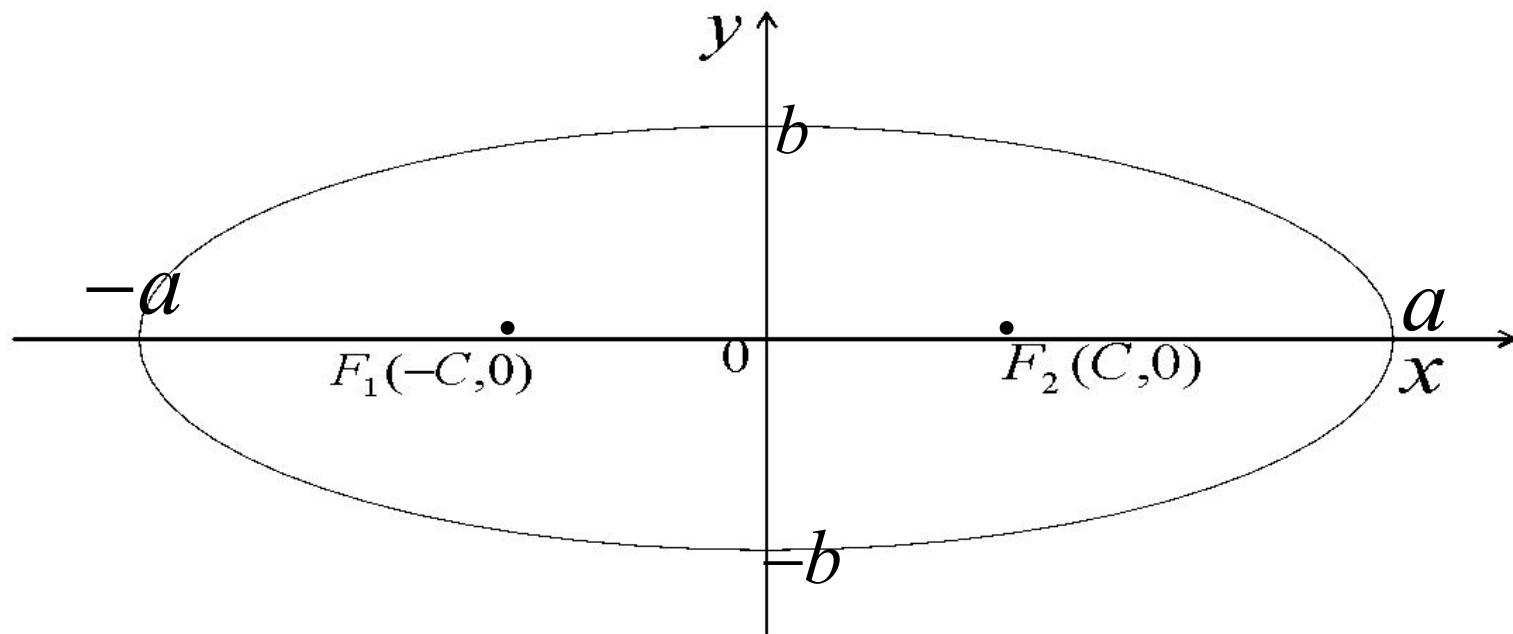
$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Эллипс



Оси симметрии эллипса называются его осями, точка их пересечения- центром эллипса, ось, на которой находятся фокусы (в данном случае это ось абсцисс) называется фокальной осью.

Точки пересечения эллипса с осями координат называются вершинами эллипса. Это точки с координатами

$$(a, 0), (-a, 0), (0, b), (0, -b).$$

Числа a, b называются полуосями эллипса.

Отношение $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$, $\varepsilon < 1$

называется эксцентриситетом эллипса и характеризует его форму, ничего не говоря о его размерах. Чем меньше эксцентриситет, тем меньше подкоренное выражение в числителе дроби, тем меньше малая полуось отличается от большой и, значит, тем меньше эллипс вытянут вдоль фокальной оси.

Замечание

Если $b > a$, то фокальной осью является $2b$

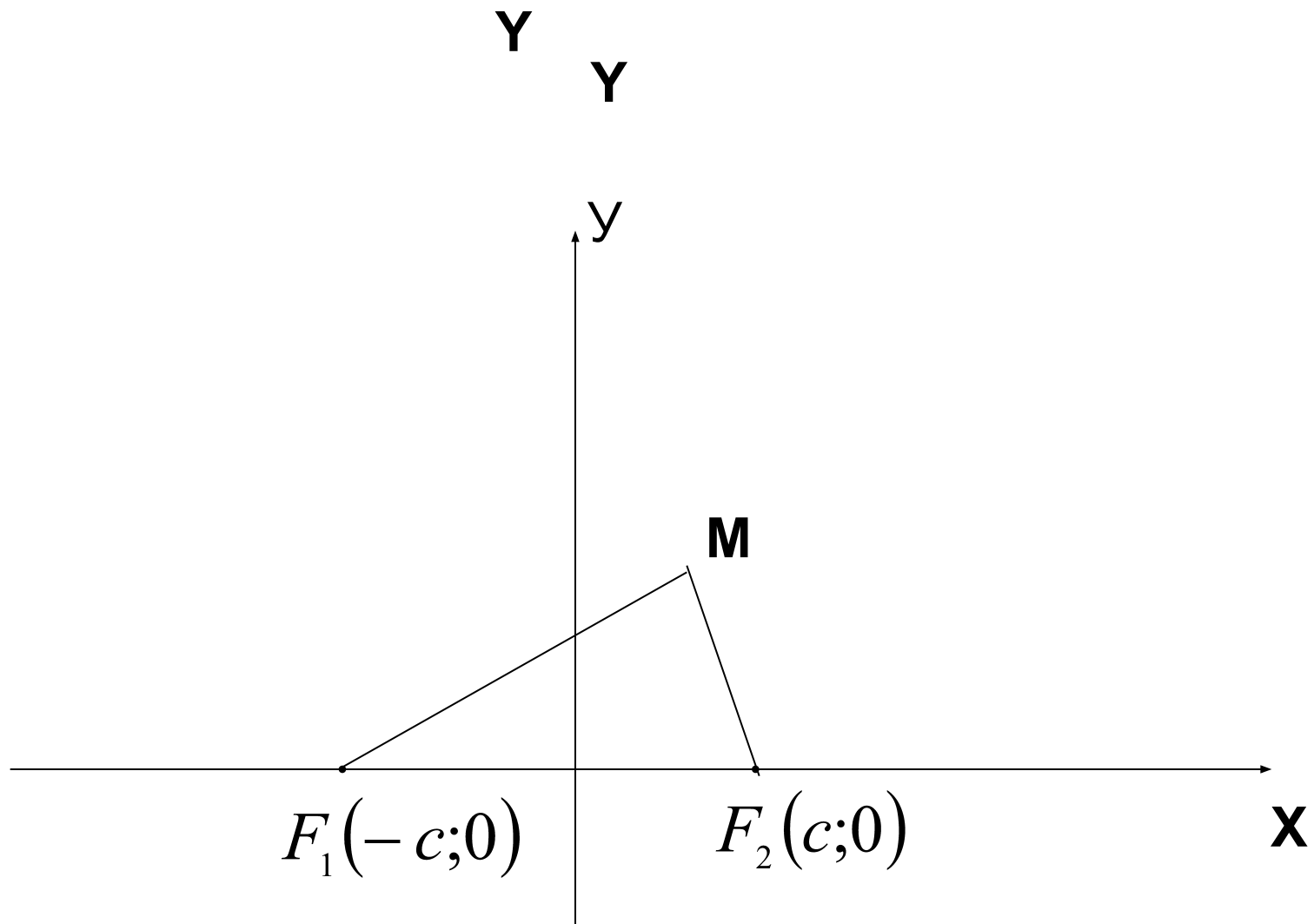
Фокусы : $F_1(0; -c)$ $F_2(0; c)$

$$b^2 - c^2 = a^2$$

$$\varepsilon = \frac{c}{b}$$

Гипербола

Гиперболой называется геометрическое место точек, разность расстояний которых от двух данных точек плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная.

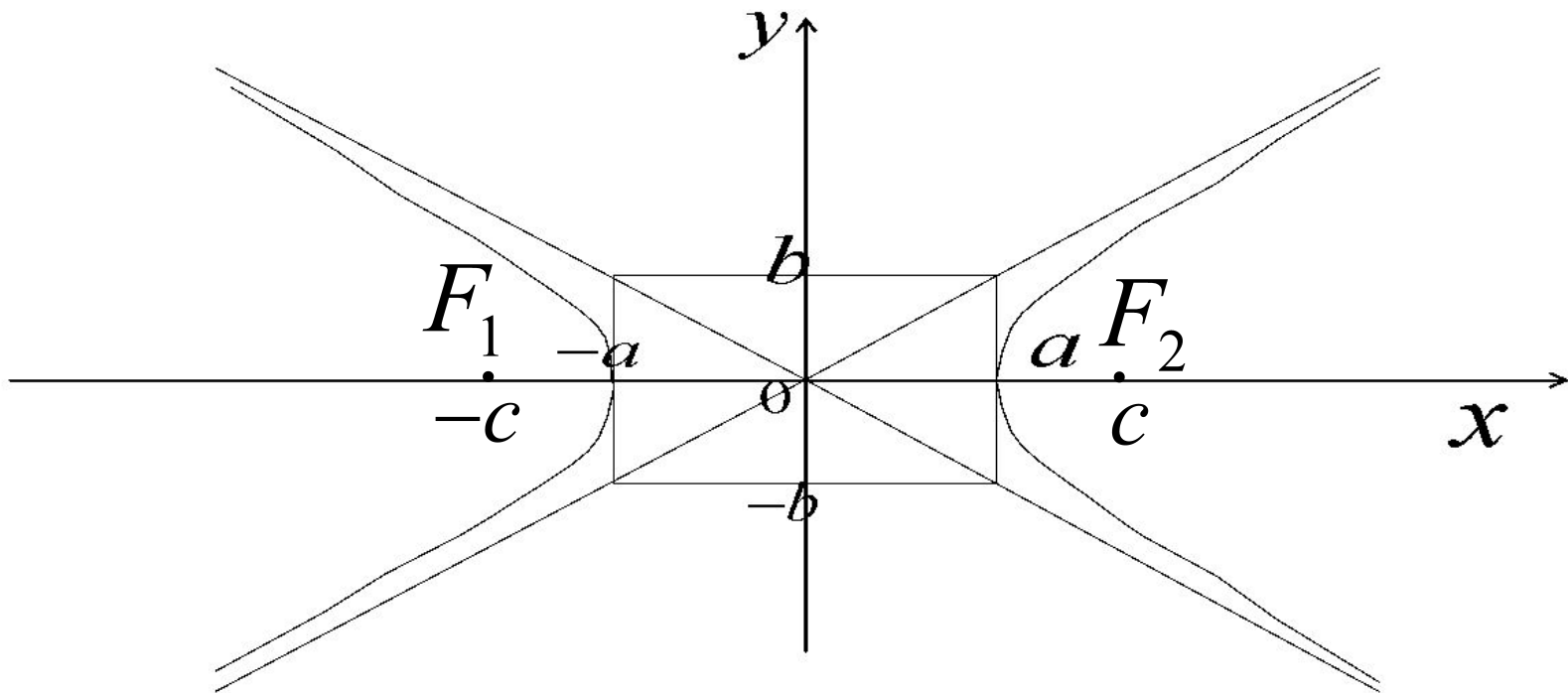


Уравнение гиперболы

$$\frac{\tilde{o}^2}{a^2} - \frac{o'^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Гипербола



Из уравнения гиперболы видно, что точек пересечения с осью Oy нет. Ось Ox называют действительной осью, а ось Oy – мнимой осью гиперболы. Гипербола имеет две вершины, лежащие на фокальной оси. Это точки

$$A_1(-a;0) \quad \text{и} \quad A_2(a;0)$$

Основной прямоугольник гиперболы

Прямоугольник, проходящий через точки

$$(a;0) \quad (-a;0) \quad (0;b) \quad (0;-b)$$

со сторонами, параллельными осям координат, называется основным прямоугольником гиперболы.

Для гиперболы

$$c^2 - a^2 = b^2.$$

Фокусы гиперболы :

$$F_1(-c; 0)$$

$$F_2(c; 0)$$

Оси и полуоси гиперболы

Принято говорить:

$2a$ и $2b$ - действительная и мнимая оси

a и b - действительная и мнимая
полуоси

$2a$ - фокальная ось

Асимптоты

Гипербола имеет две асимптоты, т. е. прямые, к которым приближаются точки этой кривой при неограниченном их удалении от начала координат вдоль по гиперболе в бесконечность. Их уравнения

$$y = \frac{b}{a} x, \quad y = -\frac{b}{a} x.$$

Отношение $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$, $\varepsilon > 1$

называется эксцентриситетом гиперболы и является мерой ее «сплюснутости», т. е. чем меньше эксцентриситет, тем меньше отношение полуосей гиперболы, а, значит, тем сильнее вытянут ее основной прямоугольник

Замечание

Для гиперболы $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$
 $2a$ - мнимая ось, а $2b$ - действительная ось

$$F_1(0; -c) \quad F_2(0; c) \quad \varepsilon = \frac{c}{b}$$

$B_1(0; -b)$ $B_2(0; b)$ – вершины

Парабола

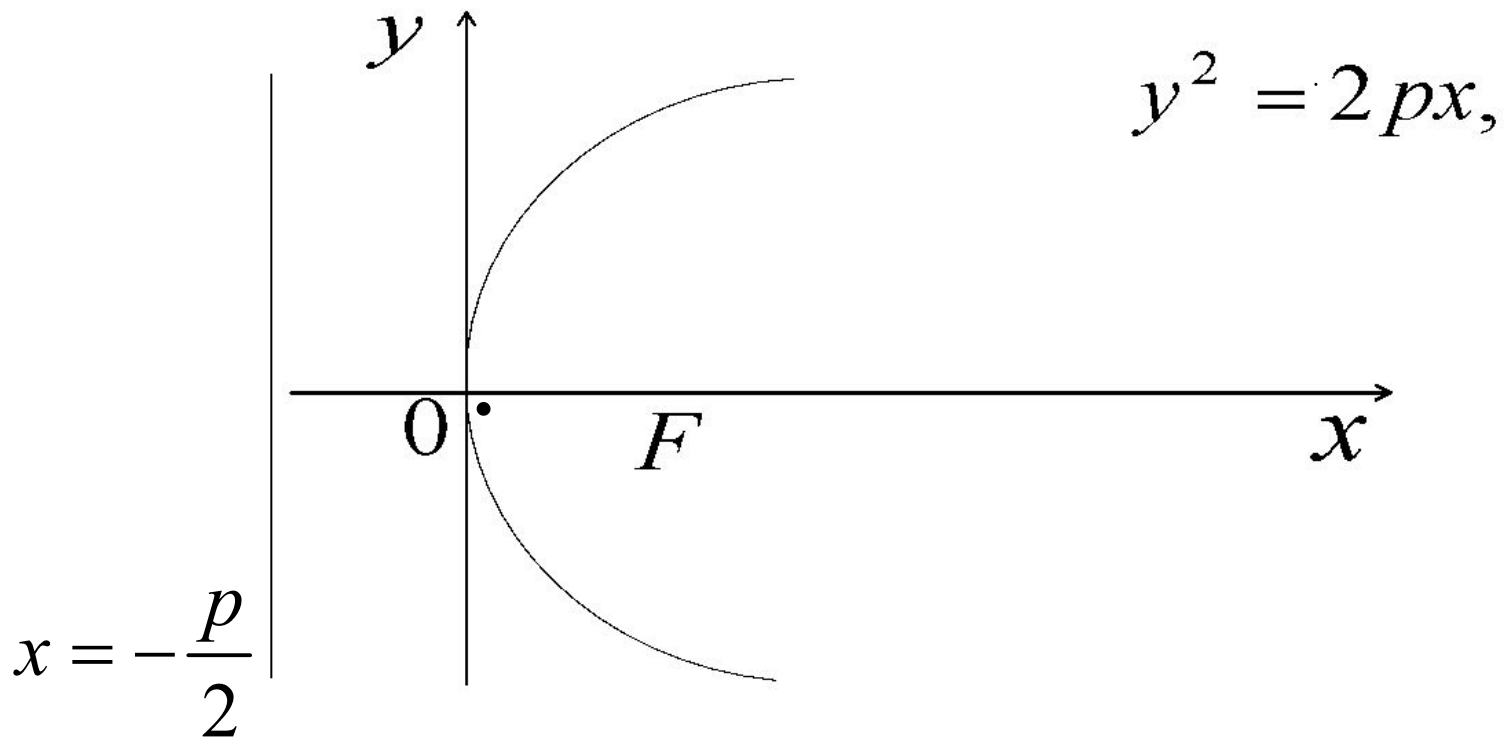
Параболой называется геометрическое место точек, равноудаленных от данной точки плоскости, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой.

Если расположить ось Ox перпендикулярно директрисе и провести ее через фокус в направлении от директрисы к фокусу, обозначив при этом расстояние от фокуса до директрисы p , то можно показать, что в этом случае уравнение параболы будет иметь вид:

$$y^2 = 2px,$$

а если через фокус провести ось Oy , то уравнение имеет вид: $x^2 = 2py$.

Парабола



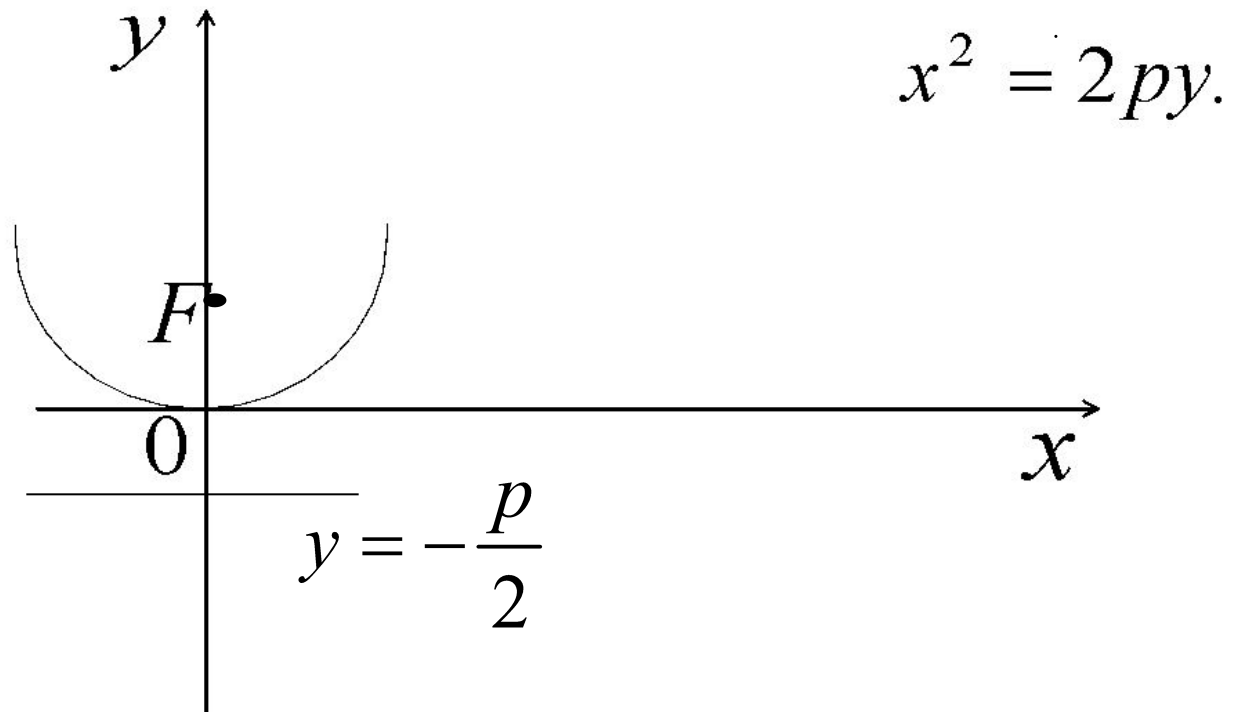
Фокус параболы - $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$,

вершина параболы – в точке
 $O(0; 0)$,

директриса параболы это прямая

$$x = -\frac{p}{2}$$

Парабола



Фокус этой параболы $F(0; \frac{p}{2})$,

вершина такой параболы
находится в точке $O(0;0)$,

директриса параболы- это
прямая $y = -\frac{p}{2}$

Самостоятельно изучить параболы

$$y^2 = -2px$$

$$x^2 = -2py$$

Общее уравнение кривой второго порядка

Уравнение кривой второго порядка может иметь вид

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

В простейшем случае при $B=0$ можно определить тип кривой, определяемой общим уравнением, выделяя полные квадраты переменных и сводя общее уравнение к каноническому уравнению той или иной кривой.

Пример

Привести уравнение $2x^2+3y^2-16x-64=0$
кривой второго порядка

к каноническому виду и найти ее центр,
полуоси, эксцентриситет, и, если кривая
имеет асимптоты, уравнения асимптот.

Для того чтобы привести уравнение кривой к каноническому виду, выделим полный квадрат переменной x . Для этого произведем преобразования:

$$2(x^2-8x)+3y^2-64=0;$$

$$2(x^2-8x+16-16)+3y^2-64=0.$$

$$2((x-4)^2-16)+3y^2-64=0;$$

$$2(x-4)^2+3y^2-32-64=0; 2(x-4)^2+3y^2=96.$$

Разделим теперь обе части уравнения на 96 и получим уравнение

$$\frac{(x-4)^2}{48} + \frac{y^2}{32} = 1$$

Это каноническое уравнение эллипса.

Полуоси этого эллипса соответственно равны:

$$a = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}, \quad b = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

Центр эллипса находится в точке $C(4;0)$.

Эксцентриситет находят по формуле .

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{\sqrt{48 - 32}}{4\sqrt{3}} = \frac{4}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Пример

Составить каноническое уравнение гиперболы, зная, что расстояние между ее фокусами равно 26, а эксцентриситет равен $\frac{13}{12}$.

Решение. По условию $2c = 26$, $\varepsilon = \frac{\tilde{h}}{a} = \frac{13}{12}$

Следовательно, большая полуось гиперболы

$$a = \frac{\tilde{h}}{\varepsilon} = 13 \cdot \frac{12}{13} = 12,$$

Тогда малая полуось

$$b = \sqrt{\tilde{n}^2 - a^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5.$$

Уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1.$$

Пример

Составить уравнение гиперболы, если расстояние между вершинами ее равно 20, а расстояние между фокусами равно 30.

Решение. $2c=30$, т.е. $c=15$. Тогда

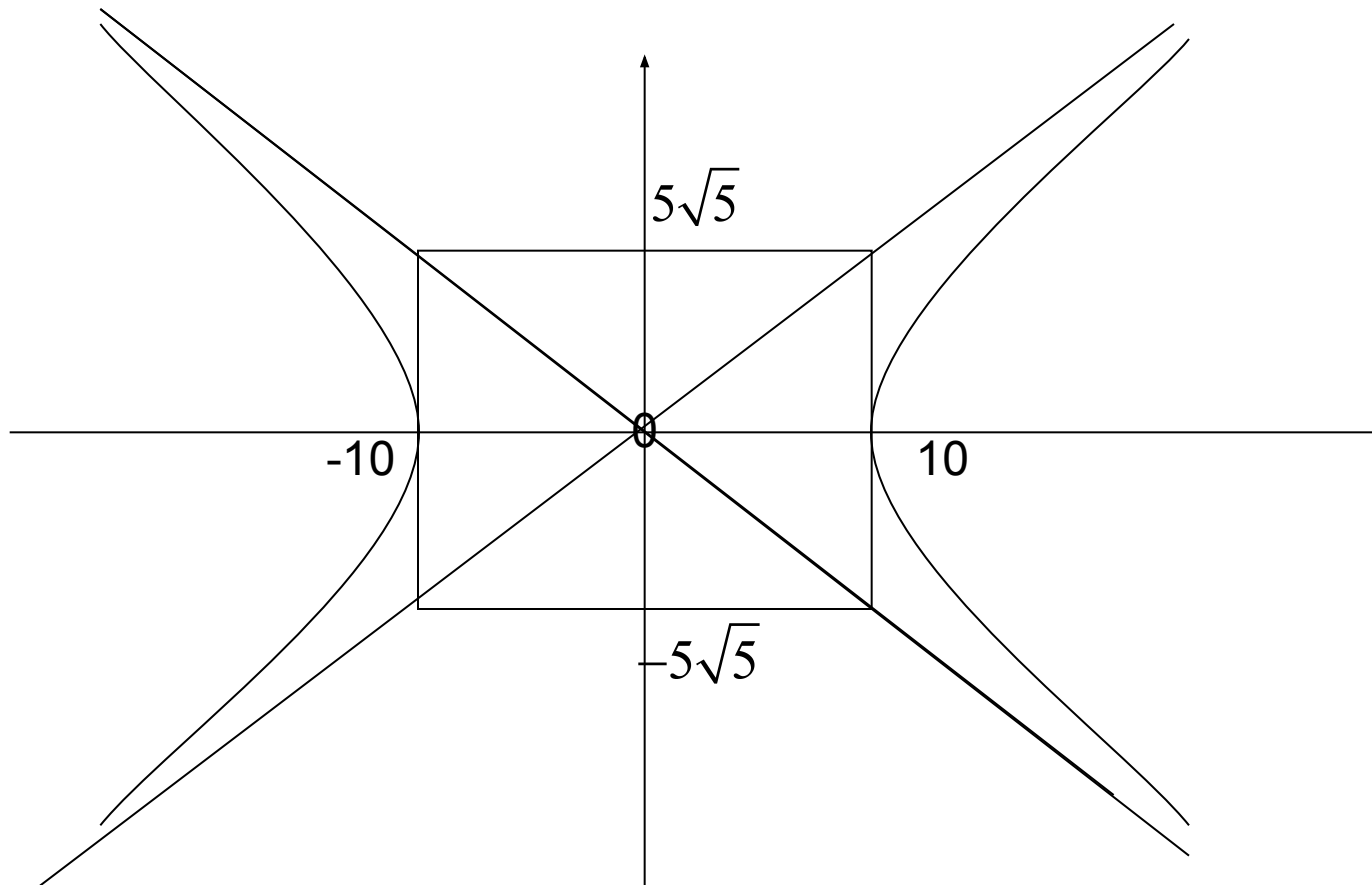
$$b^2 = c^2 - a^2 = 225 - 100 = 125,$$

а уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{125} = 1.$$

Изобразим гиперболу. Для этого построим основной прямоугольник, где

$$a = 10, \quad b = 5\sqrt{5}.$$



Пример

Парабола симметрична относительно оси Ox , проходит через точку $A(4;-1)$, а вершина ее лежит в начале координат. Составить уравнение параболы. Такая парабола имеет уравнение

$$y^2 = 2px.$$

Найдем p , подставив в уравнение координаты точки A :

$$1 = 2p \cdot 4, \quad p = 1/8 = 0,125.$$

Тогда имеем: $y^2 = 0,25x.$