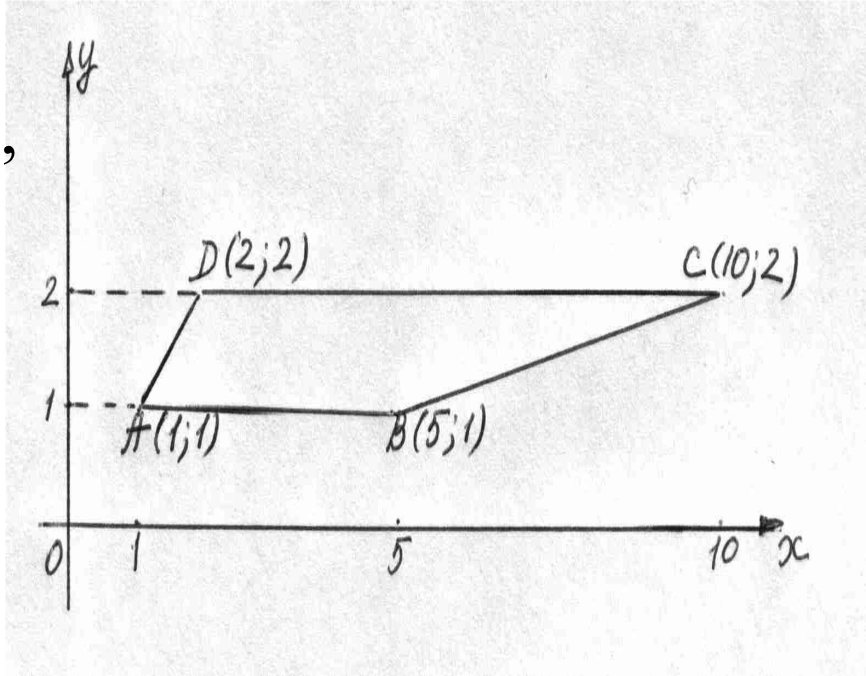
Геометрические приложения двойного интеграла

Лекция 8

Примеры

<u>*Пример 1.*</u>

Вычислить $\iint\limits_D \sqrt{xy - y^2}\,dxdy$,



где D – трапеция с вершинами A(1;1), B (5;1), C(10;2), D(2;2).

Решение

Имеем $\iint\limits_D \sqrt{xy-y^2}\,dxdy = \int\limits_1^2 dy \int\limits_y^{5y} \sqrt{xy-y^2}\,dx =$

$$\int\limits_1^2 \frac{dy}{y} \int\limits_y^{5y} (xy-y^2)^{\frac{1}{2}} d(xy-y^2) = \int\limits_1^2 \left. \frac{2(xy-y^2)^{\frac{3}{2}}}{3y} \right|_y^{5y} dx =$$

$$\frac{2}{3}\int\limits_1^2 \frac{(5y^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}{y} dy = \frac{2}{3}\int\limits_1^2 \frac{(4y^2)^{\frac{3}{2}}}{y} dy = \frac{2}{3}\int\limits_1^2 \frac{8y^3}{y} dy = \frac{16}{3}\int\limits_1^2 y^2 dy =$$

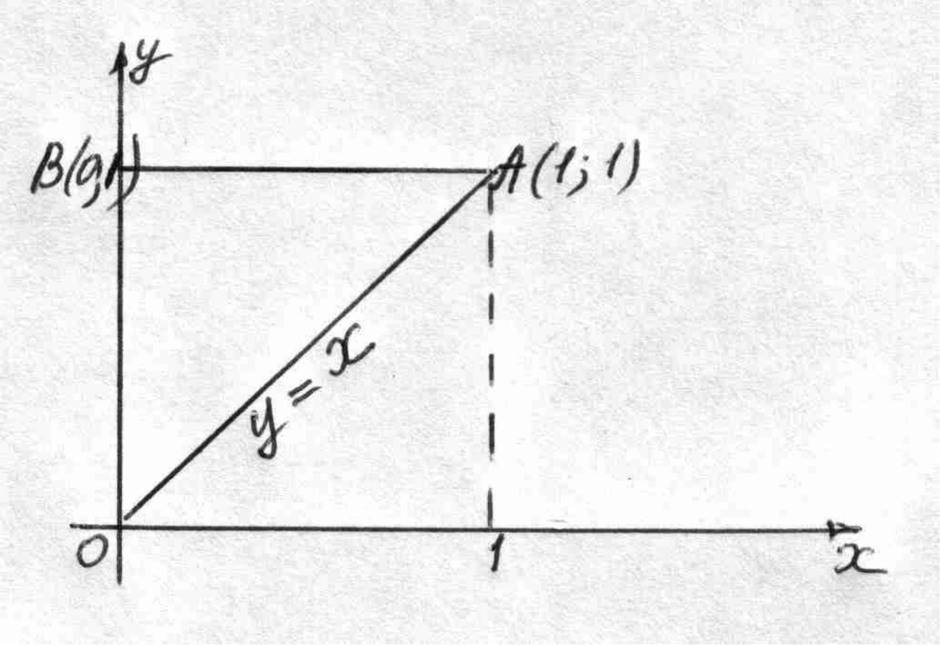
$$\frac{16}{3} \cdot \left. \frac{y^3}{3} \right|_1^2 = \frac{16}{9}(8-1) = \frac{16}{9} \cdot 7 = \frac{112}{9}.$$

Примеры

Пример 2.

Вычислить $\iint\limits_D y\,dx\,dy$,

где D – треугольник с вершинами O(0;0), A(1;1) и B(0;1).



Решение

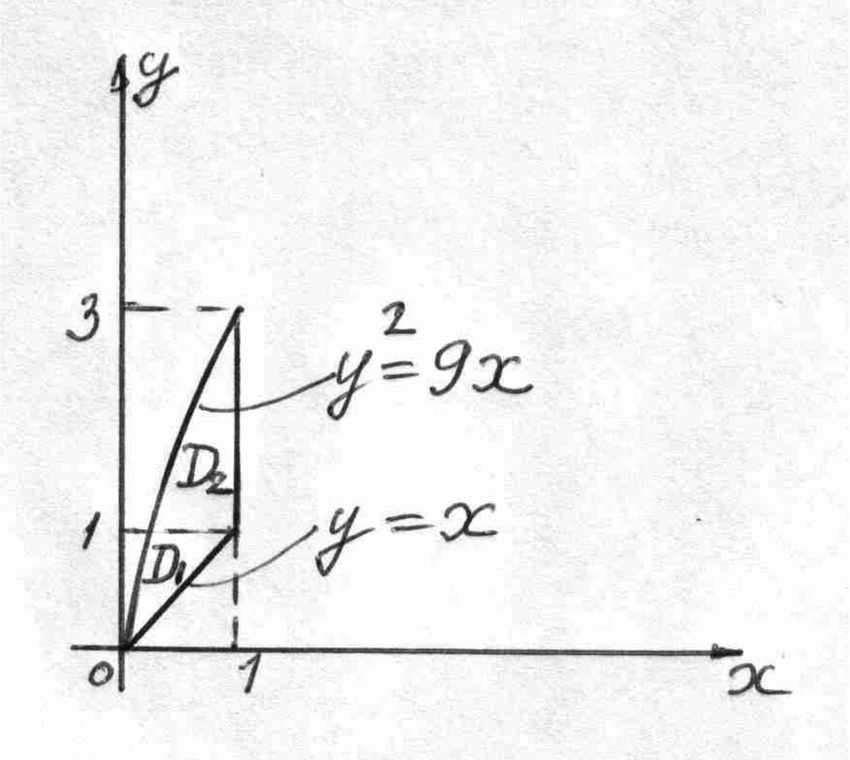
Получаем

$$\iint_D y\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_x^1 y\,dy = \int_0^1 \frac{y^2}{2}\bigg|_x^1 dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (1 - x^2)\,dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\bigg|_0^1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Примеры

<u> Пример 3.</u> Изменить порядок интегрирования в двукратном интеграле



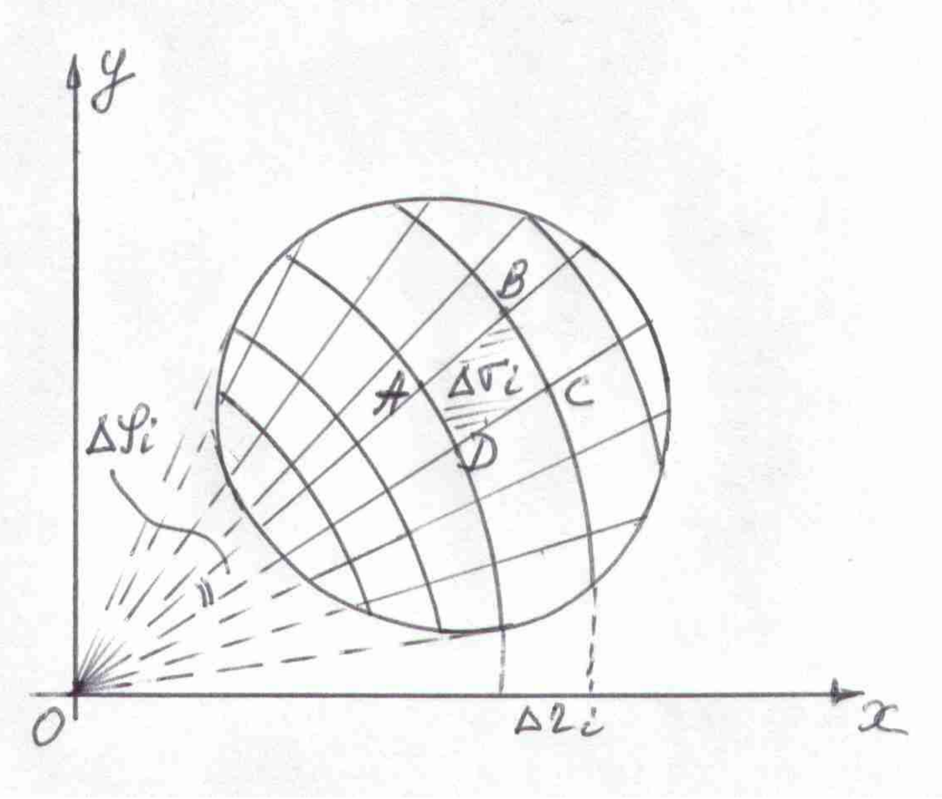
$$I=\int_0^1 dy\int_{\frac{y^2}{9}}^{y} f(x,y)dx+\int_1^3 dy\int_{\frac{y^2}{9}}^{1} f(x,y)dx.$$

$$I=\int_0^1 dx\int_x^{\sqrt{9x}} f(x,y)dy.$$

Двойной интеграл в полярных координатах

Элемент площади в полярных координатах вычисляют так:

$$d\sigma = r d\varphi dr$$



Замена переменных

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_{D'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rd\varphi dr$$

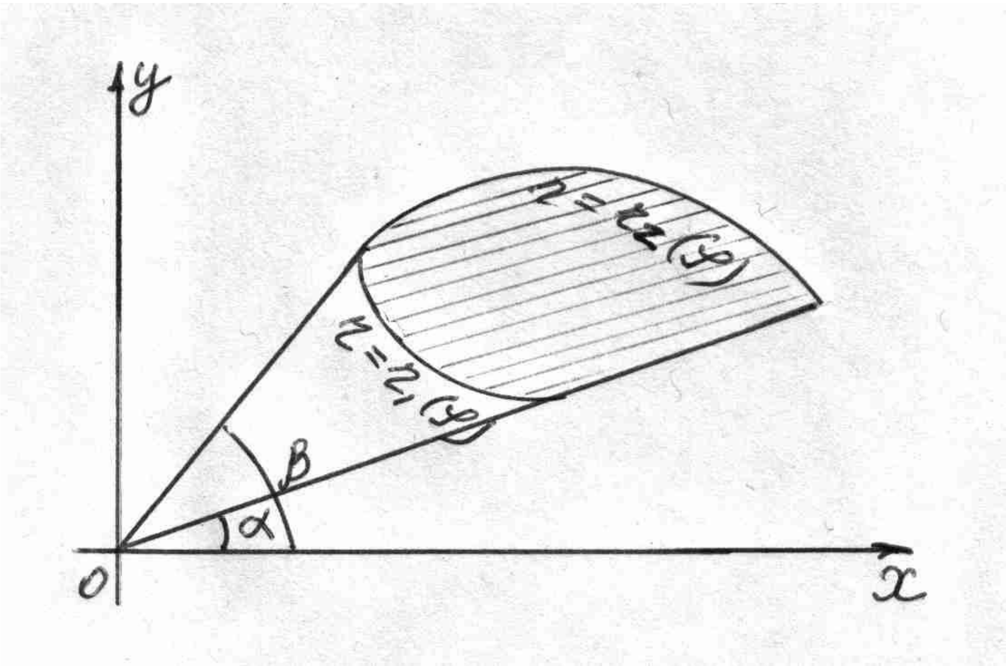
Выражение $\boxed{d\sigma = rd\varphi dr}$ называется двумерным элементом площади в полярных координатах.

Замена переменных

Для того чтобы в двойном интеграле перейти к полярным координатам, достаточно координаты *x* и *y* положить равными $r\cos\varphi$ и $r\sin\varphi$ соответственно, а вместо элемента площади   подставить его выражение в полярных координатах.

Вычисление

В полярных координатах двойной интеграл всегда вычисляют в таком порядке:



$$\boxed{\iint\limits_D F(r;\varphi)\,d\varphi\, dr = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} F(r;\varphi)\,dr.}$$

Площадь плоской фигуры

Площадь плоской фигуры в декартовых координатах вычисляют по формуле:

$$\boxed{S = \iint\limits_D dxdy,}$$

Площадь в полярных координатах

Если фигура ограничена кривыми, заданными в полярных координатах, или ее уравнение содержит двучлен

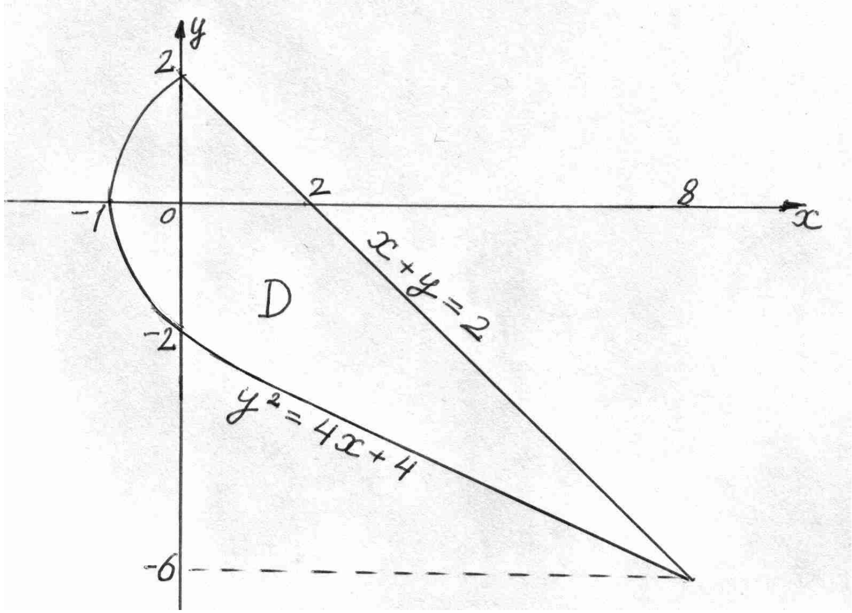
$$x^2 + y^2$$

$$\boxed{S = \iint\limits_D r\,d\varphi\,dr.}$$

Вычислить площадь

Фигура ограничена кривыми x+y=2 и

$$y^2 = 4x + 4$$



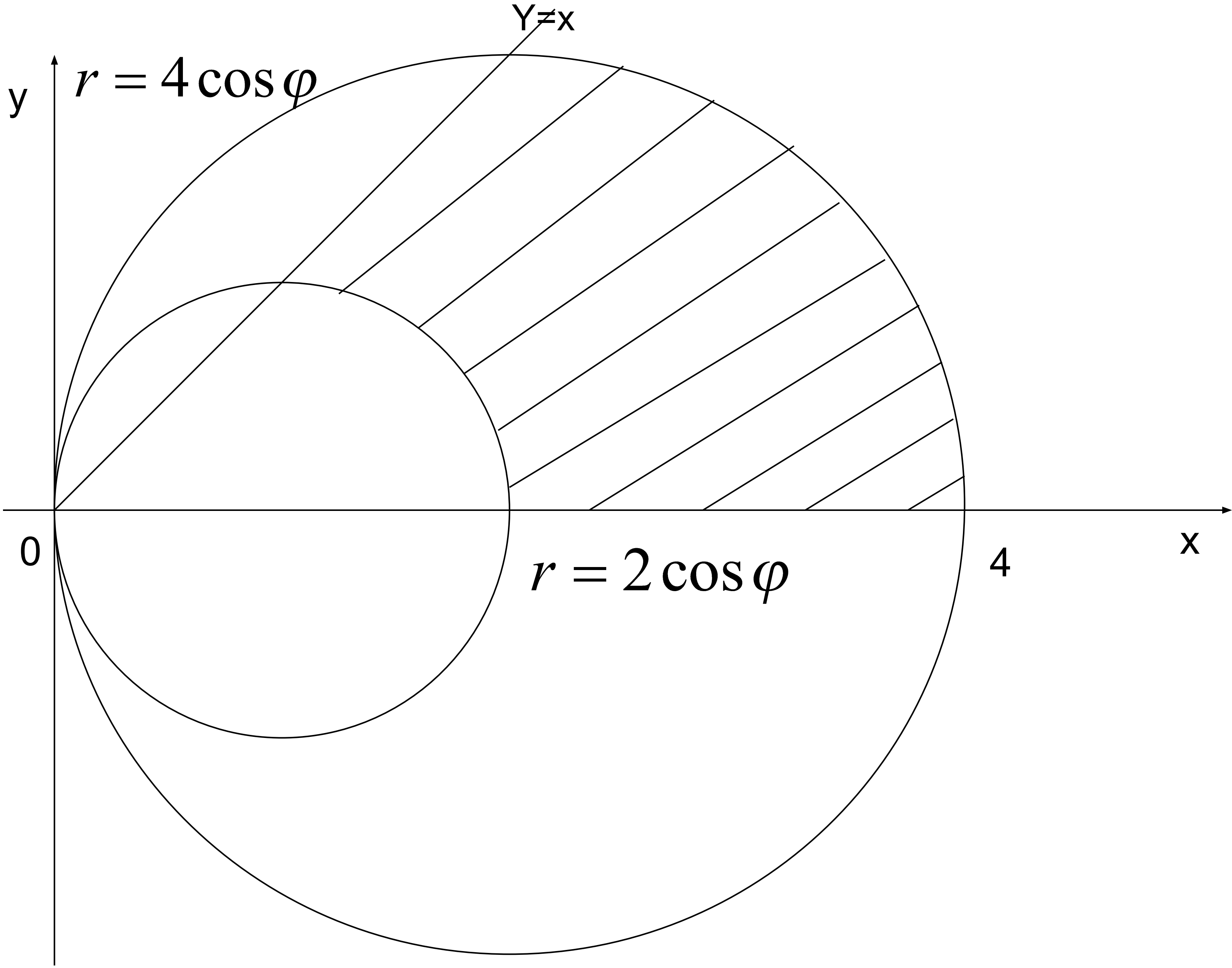
$$S = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_{-6}^{2} dy \int\limits_{\frac{y^2-4}{4}}^{2-y} dx = \int\limits_{-6}^{2} x \Bigg|_{\frac{y^2-4}{4}}^{2-y} dy = \int\limits_{-6}^{2} (2 - y - \frac{y^2}{4} + 1)dy = 21\frac{1}{3}.$$

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$x^2 + y^2 = 2x, \quad x^2 + y^2 = 4x,$$

$$y = x, \quad y = 0.$$

Перейдем к полярным координатам и изобразим фигуру.


Y=x
y
$r = 4\cos\varphi$
0
$r = 2\cos\varphi$
4
x

Решение

Площадь области *D* вычислим в полярных координатах

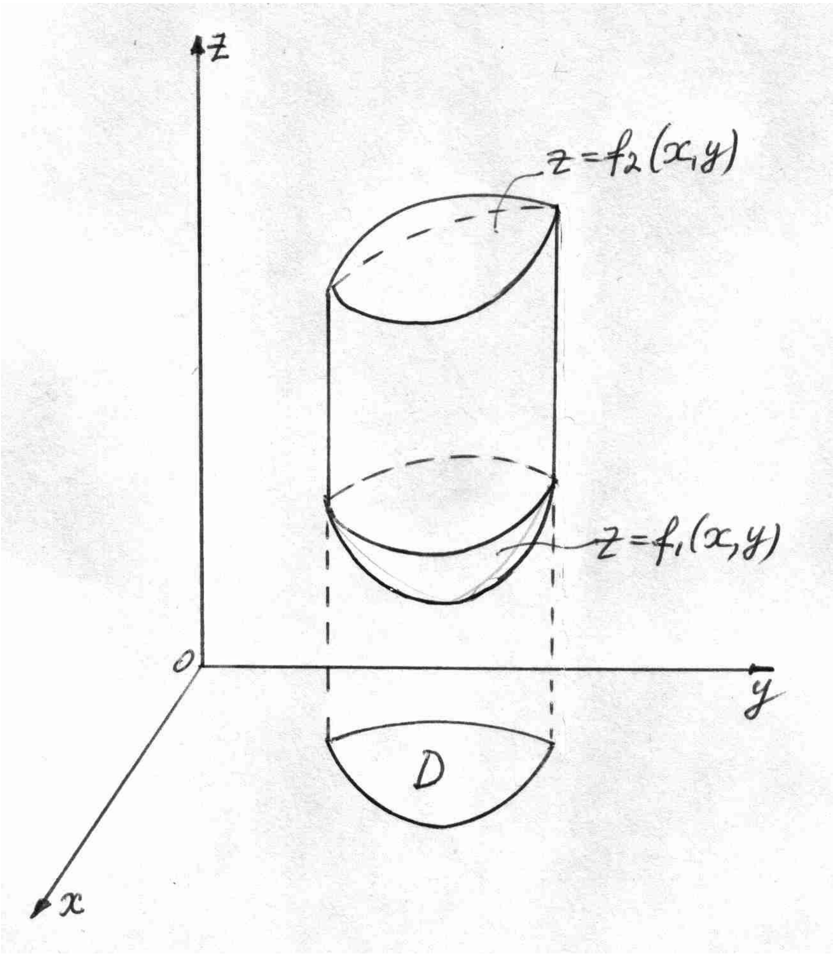
$$S=\iint\limits_D r\,d\phi\,dr=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}d\phi\int\limits_{2\cos\phi}^{4\cos\phi}r\,dr=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{r^2}{2}\Bigg|_{2\cos\phi}^{4\cos\phi}d\phi=6\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\phi\,d\phi=$$

$$=3\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2\phi)\,d\phi=3\left(\phi+\frac{\sin 2\phi}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=3\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{2}\right)=\frac{3}{4}(\pi+2).$$

Вычисление объемов тел с помощью двойного интеграла

Пусть тело ограничено с боков цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси Oz, а снизу и сверху соответственно поверхностями

$$z = f_1(x, y), z = f_2(x, y)$$



Формула для вычисления объема

Тогда объем тела равен разности объемов цилиндроидов и вычисляется по формуле:

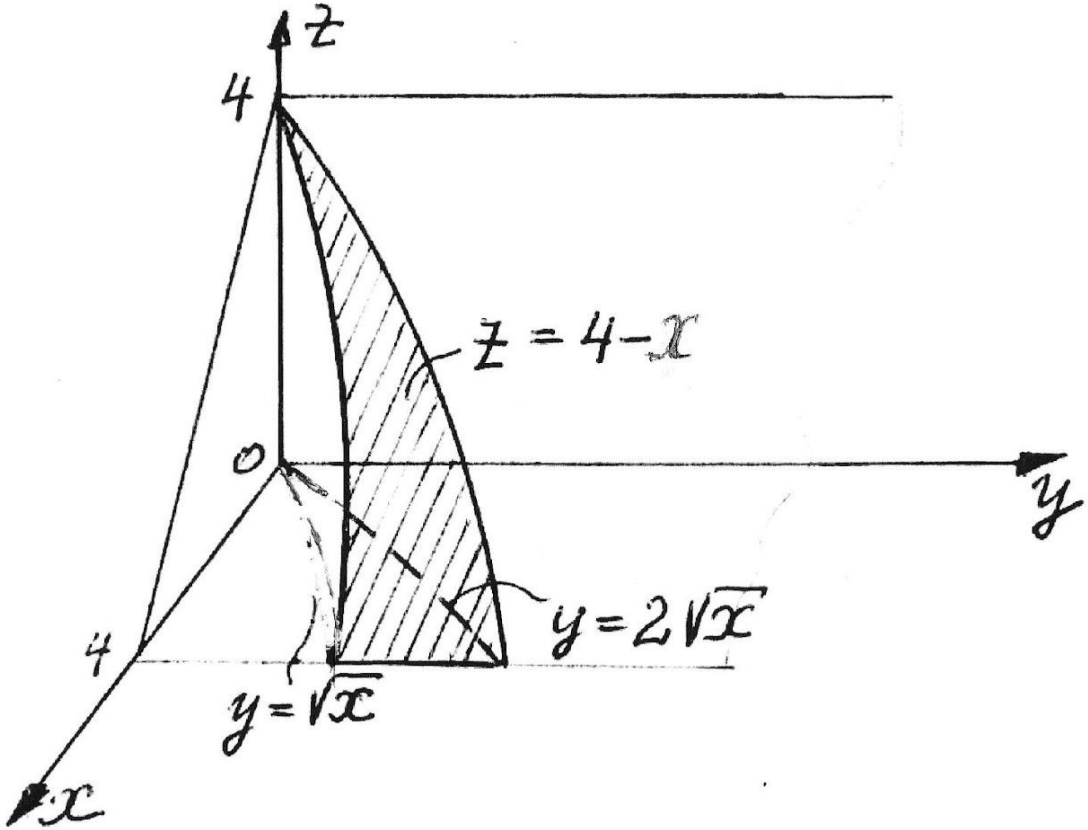
$$V = \iint\limits_D f_2(x,y)\,dxdy \quad - \quad \iint\limits_D f_1(x,y)\,dxdy =$$

$$= \iint\limits_D [f_2(x,y) - f_1(x,y)]\,dxdy.$$

Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями

x+z=4, z=0, $y=\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$.

$y=\sqrt{x}$


z
4
z = 4 − x
0
y
y = 2√x
4
y = √x
x

Вычислить объем тела

Запишем объем в виде двойного интеграла:

$$V = \iint\limits_D (4-x)\,dxdy = \int_0^4 dx \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} (4-x)\,dy = \int_0^4 (4-x)\,dx \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} dy =$$

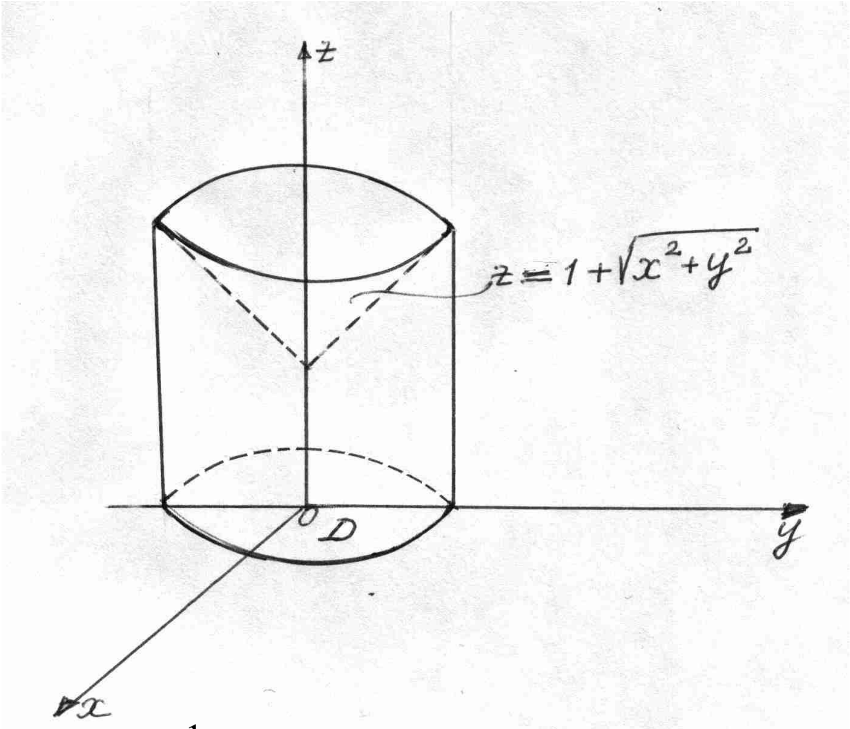
$$= \int_0^4 (4\sqrt{x} - x\sqrt{x})\,dx = \left(4 \cdot \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - 2 \cdot \frac{x^{\frac{5}{2}}}{5} \right)\Bigg|_0^4 = \frac{128}{15}.$$

Найти объем тела, ограниченного цилиндром радиуса 1, плоскостью Оху и конусом

Запишем объем

$$V = \iint\limits_D (1 + \sqrt{x^2 + y^2})dxdy.$$

Вычислим его в полярных координатах



$$V = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 (1 + r)rdr = 2\pi \cdot \left(\frac{r^2}{2} + \frac{r^3}{3} \right)\Bigg|_0^1 = 2\pi\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{3}\pi.$$