

Лекция 13.

Тема: Формула полной вероятности. Формула Бейеса.

Цель: Разъяснить формулу полной вероятности и как следствие из неё – формулу Бейеса.

Терминология

- Допустим, что об условиях опыта можно сделать n исключаящих друг друга предположений (гипотез):

H_1, H_2, \dots, H_n , где $H_i \cap H_j = \emptyset, i \neq j$

$$\sum_{i=1}^n H_i = \Omega$$

H_i – несовместные, образующие полную группу события.

Формула полной вероятности

- Заданы условные вероятности события A , при каждой из гипотез $P(A|H_1), \dots, P(A|H_n)$. Событие A может появиться только вместе с одной из гипотез.
- Найдем вероятность события A .
- $A = H_1A + H_2A + \dots + H_nA$, H_iA – несовместные события, значит
$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_iA),$$
$$P(H_iA) = P(H_i) \cdot P(A|H_i)$$

Отсюда $P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P(A|H_i)$ – формула полной вероятности

Формула полной вероятности

- Применяется, когда опыт со случайными исходами распадается на два случая:
- розыгрыш условий опыта
- розыгрыш результата

Пример 1

- Имеются два одинаковых ящика с карандашами. В 1-ом ящике – 2 зеленых и 1 синий карандаш, во 2-ом – 1 зеленый и 3 синих. Наудачу выбирают один из ящиков и вынимают из него карандаш. Какова вероятность вынуть зеленый карандаш?

Решение

- H_i – выбор i ящика

- $P(H_1) = P(H_2) = 1/2$

- $P(A|H_1) = 2/3$

- $P(A|H_2) = 1/4$

- $P(A) =$
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \left(\frac{8+3}{12} \right) = \frac{11}{24}$$

Пример 2

- Предположим, что 0,5% всех мужчин и 0,025% всех женщин дальтоники. Найти вероятность того, что наугад выбранное лицо страдает дальтонизмом. Фразу из песни считать верной: «На 10 девчонок по статистике 9 ребят».

Решение

- H_1 – выбрана женщина
- H_2 – выбран мужчина
- $P(H_1) = 10/19$;
- $P(H_2) = 9/19$;
- $P(A|H_1) = 0.00025$
- $P(A|H_2) = 0.005$
- $P(A) = \frac{10}{19} \cdot 0,00025 + \frac{9}{19} \cdot 0,005 = \frac{1}{19 \cdot 400} + \frac{9}{19 \cdot 200} = \frac{1+9 \cdot 2}{19 \cdot 400} = \frac{19}{19 \cdot 400} = \frac{1}{400}$

Формула Бейеса

- До опыта о его условиях можно было сделать ряд гипотез
- H_1, H_2, \dots, H_n ; $\sum H_i = \Omega$; $H_i H_j = \emptyset$
- Вероятности гипотез до опыта «априорные вероятности» заданы:

$$P(H_1), \dots, P(H_n); \sum_{i=1}^n P(H_i) = 1$$

Пусть опыт проведен, в результате его появилось событие A . Найдем вероятность гипотез, при условии, что A произошло (найти «апостериорные» вероятности гипотез, при условии, что опыт дал результат A).

Формула Бейеса

- $P(H_1|A); P(H_2|A) \dots P(H_n|A)$
- $P(H_i A) = P(H_i) \cdot P(A|H_i) = P(A) \cdot P(H_i|A)$
- $$P(H_i|A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A|H_i)}{\sum_{i=1}^n P(H_i)P(A|H_i)} = \frac{P(H_i) \cdot P(A|H_i)}{P(A)}$$

Пример 1

1. Три барабана с лотереями: в 1-ом 50 билетов, из которых два выигрышных; во 2-ом 100 билетов – 4 выигрышных; в 3-ем 300 билетов – 5 выигрышных. Изымают 1 билет – выигрышный. Из какого барабана менее вероятно этот билет?

Решение

- $P(H_i) = 1/3$;
- $P(A|H_1) = 2/50 = 1/25$;
- $P(A|H_2) = 4/100 = 1/25$;
- $P(A|H_3) = 5/300 = 1/60$;
- $P(A) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{25} + \frac{1}{60} \right) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{29}{300} \right) = \frac{29}{900}$
- $P(H_1|A) = \frac{1/25 * 1/3}{29/900} = \frac{1}{75} \cdot \frac{900}{29} = \frac{12}{29}$
- $P(H_2|A) = 12/29$
- $P(H_3|A) = 5/29$

Пример 2

2. Два студента на практике в налоговой полиции проверяют правильность заполнения налоговых деклараций членами правительства РФ. 1 студент обрабатывает 60% деклараций, 2-ой – 40%. Вероятность того, что 1-ый допустит ошибку при обработке 0.01, 2-ой – 0.03. Руководитель практики для контроля проверил одну декларацию и выявил ошибку проверки. Определить вероятность того, что ошибся 1-ый студент.

Решение

- H_1 – проверил 1-ый студент
- H_2 – проверил 2-ой студент
- A – «студент ошибся»

$$\bullet P(H_1|A) = \frac{0,6 \cdot \frac{1}{100}}{0,6 \cdot \frac{1}{100} + 0,4 \cdot \frac{3}{100}} = \frac{0,006}{0,006 + 0,012} = \frac{0,006}{0,018} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$$

- **Вопросы:**
- Каким условиям должны отвечать гипотезы H для события A ?
- В примере 2 (слайд №13) найти вероятность того, что ошибся 2 студент?