

Лекция 6.

Тема: Основные принципы комбинаторики.

Цель: Ознакомиться с основными принципами комбинаторики.

Комбинаторика

- *Комбинаторика* – раздел математики, посвященный подсчету количеств разных комбинаций элементов некоторого, обычно конечного, множества
- *Комбинаторика* возникла в XVI веке. Первоначально комбинаторные задачи касались в основном азартных игр. Одним из первых занялся подсчетом числа различных комбинаций при игре в кости итальянский математик Тарталья. Теоретическое исследование вопросов комбинаторики предприняли в XVII веке французские ученые Паскаль и Ферма. Дальнейшее развитие комбинаторики связано с именами Якова Бернулли, Лейбница и Эйлера.

Принципы комбинаторики

Принцип сложения

- Основные принципы комбинаторики:
- Принцип сложения.
- Принцип умножения.

Принцип сложения

Задача 1: В классе 7 девочек и 8 мальчиков. Сколькими способами можно выбрать 1 человека для работы у доски?

Решение: Для работы у доски мы можем выбрать девочку 7 способами **или** мальчика 8 способами.

Общее число способов равно $7+8=15$.

Задача 2: В классе 7 человек имеют «5» по математике, 9 человек – «5» по истории, 4 человека имеют «5» и по математике и по истории. Сколько человек имеют пятерку по математике или по истории?

Решение: Так как 4 человека входят и в семерку отличников по математике и в девятку отличников по истории, то сложив «математиков» и «историков», мы дважды учтем этих четверых, поэтому вычтя их один раз из суммы, получим результат $7+9-4=12$.
Итак, 12 человек имеют пятерку по математике или по истории.

Принцип сложения

- Принцип сложения 1: Если объект **a** можно получить **n** способами, объект **b** можно получить **m** способами и эти способы различны, то объект «**a или b**» можно получить **n+m**.
- Принцип сложения 2: Если объект **a** можно получить **n** способами, объект **b** можно получить **m** способами, то объект «**a или b**» можно получить **n+m-k** способами, где **k** – это количество повторяющихся способов.

Принцип умножения

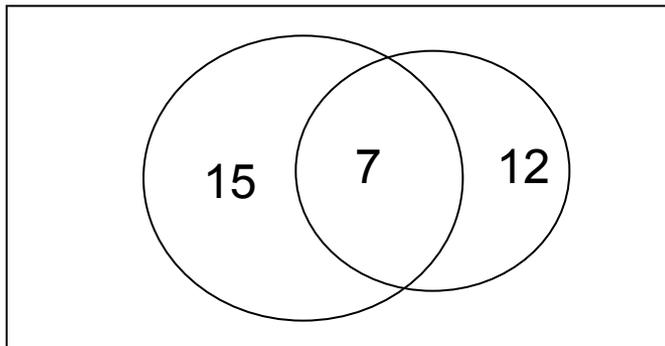
- **Задача**: На вершину горы ведут 5 дорог. Сколькими способами можно подняться на гору и спуститься с нее?
- **Решение**: Для каждого варианта подъема на гору существует 5 вариантов спуска с горы. Значит всего способов подняться на гору и спуститься с нее $5 \cdot 5 = 25$.
- **Принцип умножения**: если объект ***a*** можно получить ***n*** способами, объект ***b*** можно получить ***m*** способами, то объект «***a* и *b***» можно получить ***m \cdot n*** способами.

Задачи

- 1) Из 10 коробок конфет, 8 плиток шоколада и 12 пачек печенья выбирают по одному предмету для новогоднего подарка. Сколькими способами это можно сделать?
- **Решение.** Коробку конфет можно выбрать 10 способами, шоколад – 8, печенье – 12 способами. Всего по принципу умножения получаем $10 \cdot 8 \cdot 12 = 960$ способов.

Задачи

- 2) В классе 24 человека. Из них 15 человек изучают английский язык, 12 – немецкий язык, 7 – оба языка. сколько человек не изучают ни одного языка?
- Решение. По принципу сложения 2 получим количество людей, изучающих английский или немецкий $15+12-7=20$. Из общего числа учеников класса вычтем полученное количество людей. $24-20=4$. 4 человека не изучает ни одного языка.



Решение задач

Задачи

- 1) Из двух спортивных обществ, насчитывающих по 20 боксеров каждое, надо выделить по одному боксеру для участия в состязаниях. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. По принципу умножения

$$20 \cdot 20 = 400$$

Задачи

- 2) Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную букву в слове «экзамен»?

Решение. В слове «экзамен» 3 гласные буквы и 4 согласные. По принципу умножения

$$3 \cdot 4 = 12$$

Задачи

- 3) В классе 20 человек, из них 9 человек изучают язык программирования Бейсик, и 8 человек изучают Паскаль. Сколько человек не изучают языки программирования, если известно, что других языков в этом классе не изучают и каждый человек знает не более одного языка программирования?

Решение. По принципу сложения получим, что $9+8=17$ человек изучают языки программирования.

$20-17=3$ человека не изучают языки программирования.

Задачи

- 4) От дома до школы существует 6 маршрутов. Сколькими способами можно дойти до школы и вернуться, если дорога «туда» и «обратно» идет по разным маршрутам?

Решение. По принципу умножения

$$6 \cdot 5 = 30$$

Задачи

- 5) Из 3 экземпляров учебника алгебры, 5 экземпляров учебника геометрии и 7 экземпляров учебника истории нужно выбрать по одному экземпляру каждого учебника. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. По принципу умножения

$$3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$$

Задачи

- 6) В корзине лежат 15 яблок и 10 апельсинов. Яша выбирает из нее яблоко или апельсин, после чего Полина берет яблоко и апельсин. В каком случае Полина имеет большую свободу выбора: если Яша взял яблоко или если он взял апельсин?

Решение. Если Яша взял яблоко, то по принципу умножения Полина может осуществить свой выбор $14 \cdot 10 = 140$ способами. Если Яша взял апельсин, то - $15 \cdot 9 = 135$ способами.

В первом случае у Полины свобода выбора большая.

Задачи

- 7) В книжном магазине есть 7 экземпляров романа Ф. М. Достоевского «Идиот», 4 экземпляра его же романа «Братья Карамазовы» и 5 экземпляров «Преступление и наказание». Кроме того есть 5 томов, содержащих романы «Идиот» и «Преступление и наказание», и 7 томов, содержащих «Преступление и наказание» и «Братья Карамазовы». Сколькими способами можно сделать покупку, содержащую по одному экземпляру каждого из романов?

Решение. Можно купить либо по экземпляру каждого романа, либо том, содержащий два романа и экземпляр третьего. По принципу умножения и сложения получим $7 \cdot 4 \cdot 5 + 5 \cdot 4 + 7 \cdot 7 = 140 + 20 + 49 = 209$

- **Вопросы:**
- Перечислите основные принципы комбинаторики.
- Сколькими способами могут совершить обмен 1 диска два студента, если у одного 7 дисков, а у другого 5?