Кафедра математики и моделирования
Старшие преподаватели Е.Д. Емцева и Е.Г. Гусев
Курс «Высшая математика»

Лекция 4.

Тема: Множество. Операции над множествами.

Цель: Рассмотреть понятие множества, подмножества, пустого, универсального множества. Определить основные операции на множествами.

Введение в теорию множеств

1. Основные определения, терминология

Под *множеством A* мы понимаем совокупность объектов произвольной природы, объединенных общим свойством *P(x)*.

Обозначение

1) Указанием определяющего свойства $A = \{x | P(x)\}$

2) Перечислением элементов $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

Пример 1

$$B = \{x | x^2 - 2x - 3 = 0\}$$

$$B = \{3; -1\}$$

Иногда второе обозначение распространяется и на некоторые бесконечные множества. Так,

$N=\{1,2,3,\ldots,n,\ldots\}$

$Z=\{\ldots,-n,\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots,n,\ldots\}$.

Определение 1

Множество A называется *подмножеством* B, если для любого x $(x \in A \to x \in B)$

Обозначение:

$$A \subseteq B$$

Другими словами, символ "$A \subseteq B$" есть сокращение для высказывания $(x \in A \to x \in B)$

Теорема 1

Для любых множеств A, B, C верно следующее:

а) $A \subseteq A$;

б) $A \subseteq B$ и $B \subseteq C \to A \subseteq C$.

Определение 2

Множества *A* и *B* называются *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов *(A=B)*. Другими словами, обозначение *A=B* служит сокращением для высказывания

$$(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

Пример

Указать равные множества

$A=\{0;1;2\}$, $B = \{1;0;2\}$, $C=\{0;1;2;0\}$, $D=\{\{1;2\};0\}$, $E=\{1;2\}$, $F=\{x:x^3-3x^2+2x=0\}$.

Определение 3

Множество называется *пустым*, если оно не содержит ни одного элемента, то есть x не принадлежит этому множеству (для любого x).

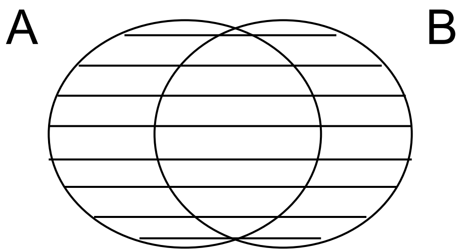
Обозначение: $\varnothing$

2. Операции над множествами

Определение 1

Объединением двух множеств A и B называется множество $A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$

$$x \in A \cup B \leftrightarrow x \in A \vee x \in B$$



$A \cup B$

Пример

Пусть $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{2,4,6,8\}$, тогда $A \cup B = \{1,2,3,4,6,8\}$.

Объединение множеств

Теорема 1

Пусть *A*, *B*, *C* – произвольные множества. Тогда:

а) $A \cup A = A$ – *идемпотентность* объединения;

б) $A \cup B = B \cup A$ – *коммутативность* объединения;

в) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ – *ассоциативность* объединения;

г) $A \cup \varnothing = A$;

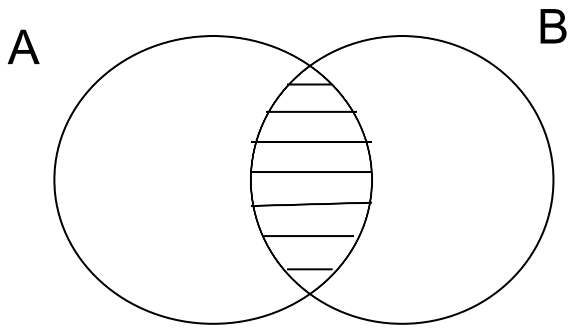
д) $A \cup B = \varnothing \Leftrightarrow A = B = \varnothing$

Пересечение множеств

Определение 2

Пересечением множеств A и B называется множество

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$



$A \cap B$

Пример

Пусть A={1,2,4,7,8,9}, B={1,3,5,7,8,10}, тогда $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \{1,7,8\}$

Пересечение множеств

Теорема 2

Пусть A, B, C – произвольные множества, тогда:

а) $A \cap A = A$ - *идемпотентность* пересечения;

б) $A \cap B = B \cap A$ - *коммутативность* пересечения;

в) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ - *ассоциативность* пересечения;

г) $A \cap \varnothing = \varnothing$

Объединение и пересечение множеств

Теорема 3

1) $A \cap B \subseteq A$

2) $A \subseteq A \cup B$

3) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

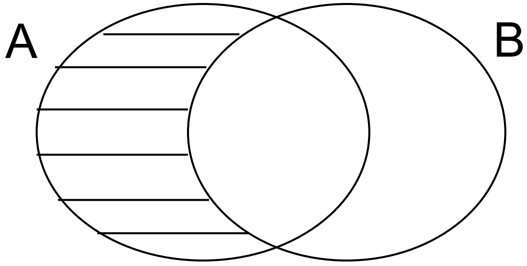
4) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Разность множеств, дополнение, симметрическая разность

Определение 3

Разностью множеств A и B называется множество

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}.$$



$A \setminus B$

Пример

Пусть $A=\{1,3,4,7,8,9,10\}$, $B=\{2,3,4,5,6,7\}$, тогда $A \setminus B=\{1,8,9,10\}$, $B \setminus A=\{2,5,6\}$.

Разность множеств

Теорема 4

Пусть *A*, *B*, *C* – произвольные множества, тогда:

1) $A \setminus A = \varnothing$

2) $A \setminus B = \varnothing \Leftrightarrow A \subseteq B$

3) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$

4) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$

Теорема 5 (законы Моргана)

а) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus B)$

б) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus B)$

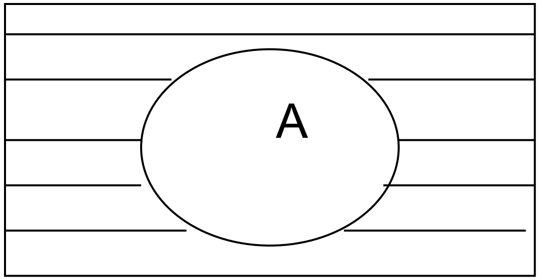
Множество U назовем *"универсальным"*, если оно содержит все элементы и все множества являются его подмножествами. Понятие *"универсального множества"* у нас будет зависеть от круга задач, которые мы рассматриваем. Довольно часто под универсальным множеством понимают множество R — множество вещественных чисел или множество C – комплексных чисел. Возможны и другие примеры. Всегда в контексте необходимо оговорить, что мы понимаем под универсальным множеством U.

Дополнение множеств

Определение 4

Пусть *U* – универсальное множество. *Дополнением A* в *U* (или просто *дополнением A*) называется множество .

$$\overline{A} = \{x \mid x \notin A\}$$



$\overline{A}$

Пример

Если *U* – множество вещественных чисел и *A* – множество рациональных чисел, то – множество $\overline{A}$ иррациональных чисел

Дополнение множеств

1) $\overline{\overline{A}} = A$

2) $\overline{U} = \varnothing$

3) $\overline{\varnothing} = U$

Законы Моргана для дополнений

а) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;

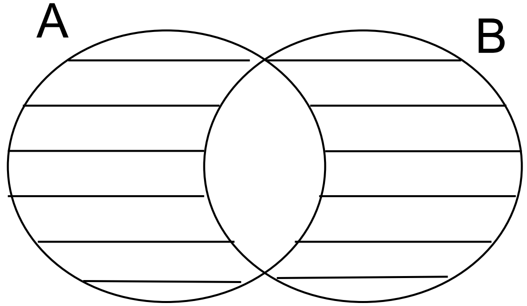
б) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

ВГУЭС

Симметрическая разность

- **Определение 5**
- Симметрической разностью множеств A и B называют множество

$$A \dot{-} B = \left(A \cup B\right) \setminus \left(A \cap B\right)$$



$$A \dot{-} B$$

- Задача (3 балла).
- Доказать, что $A \dot{-} B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

- **Вопросы:**
- 1) Приведите пример множества, состоящего из 3 элементов. Опишите это множество свойством.
- 2) Перечислите все подмножества указанного множества. Чему равно их пересечение?

Лекция 5.

Тема: Вычисление множеств. Выражение множеств через данные.

Цель: Овладеть навыками вычисления множеств и выражения множеств через данные.

Вопросы:

1) Чему равно объединение и пересечение пустого и универсального множеств?
2) Выразить множество $\{1;4\}$ через данные:

$A = \{1;3;5\}$

$B = \{2;5;4;6\}$ $U = \{1;2;3;4;5;6;7;8\}$

$C = \{1;2;3;7\}$

Лекция 6.

Тема: Размещения.

Цель: Рассмотреть формулы для числа размещений без повторений и с повторениями.

Вопросы:

1) Является ли перестановка – размещением?
2) Сравнить выражения A_7^3 и A_3^7

Лекция 7.

Тема: Сочетания.

Цель: Разобрать формулы для числа сочетаний с повтором и без повтора. Освоить их применение при решении задач.

Вопросы:

1) Сравнить выражения C_n^k и A_n^k
2) Вычислить $\bar{C}_2^8$

Лекция 8.

Тема: Случайное событие. Вероятность события.

Цель: Разобрать понятия опыта случайного события, вероятности. Обсудить условия применения классической формулы вероятности.

Вопросы:

1) Ответить на вопрос слайда №5.
2) Можно ли в задаче 3 (слайд №12) случай A_1 и A_4 объединить в один и применить классическую формулу? Почему?

Лекция 9.

Тема: Теоремы сложения и умножения вероятностей.

Цель: Рассмотреть события и действия над ними на языке теории множеств. Разобрать теоремы сложения и умножения вероятностей.

Вопросы:

1) Чему равно произведение противоположных событий?
2) Описать множество элементарных событий для последнего примера.

Лекция 10.

Тема: Решение задач по классической формуле для подсчета вероятностей.

Цель: Привить навыки применения классической формулы вероятности.

Вопросы:

1) Каким условиям должны удовлетворять события, чтобы допустимо было применить классическую формулу вероятности.
2) Найти вероятность, угадать задуманное двузначное число с первого раза.

Лекция 11.

Тема: Решение задач с использованием теорем сложений и умножения вероятностей.

Цель:

Вопросы:

Лекция 12.

Тема: Формула полной вероятности. Формула Бейеса.

Цель: Разъяснить формулу полной вероятности и как следствие из неё – формулу Бейеса.

Вопросы:

1) Каким условиям должны отвечать гипотезы H_i для события А?
2) В примере 2 (слайд №13) найти вероятность того, что ошибся 2 студент?

Лекция 13.

Тема: Решение задач с использованием формулы полной вероятности и формулы Бейеса.

Цель: Овладеть навыками решения задач по формулам полной вероятности и формуле Бейеса.

Вопросы:

1) Чему равна сумма вероятностей гипотез H_i для события А?
2) Чему равна сумма гипотез события А?

Лекция 14.

Тема: Повторение опытов. Формула Бернулли.

Цель: Ознакомиться с формулой Бернулли и приближенными формулами в схеме Бернулли.

Вопросы:

1) Укажите условия применения формулы Бернулли.

2)

Лекция 0.

Тема: Метод математической индукции.

Цель: Научиться применять ММИ при доказательстве утверждений, свойств.

Вопросы:

1) Перечислить основные этапы доказательства ММИ.
2) Слайд №11.

Лекция 6.

Тема: Основные принципы комбинаторики.

Цель: Ознакомиться с основными принципами комбинаторики.

Вопросы:

1) Перечислите основные принципы комбинаторики.
2) Сколькими способами могут совершить обмен 1 диска два студента, если у одного 7 дисков, а у другого 5?