Задачи по теории вероятностей. Теорема сложения и умножения вероятностей

Теоремы сложения и умножения для двух событий

- 1) P(A + B) = P(A) + P(B) (A,B - несовместны)
- 2) $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)$
- 3) P(AB) = P(A)· P(B), (A,B- независимы)
- 4) P(AB) = P(A)· P(B | A)

История о находчивом майоре

- В городе объявлен розыск четверых особо опасных преступников, ограбивших банк. Чтобы предотвратить утечку информации при передаче в Центр сообщений о ходе розыска, майор Зимин придумал такой способ. Он зашифровал первыми буквами алфавита следующие события:
- Событие Р- обнаружен преступник Рыков;
- Событие У - обнаружен преступник Угрюмов;
- Событие Ф - обнаружен преступник Фомкин;
- Событие Т - обнаружен преступник Тимошкин.
- Вскоре в центр пришли следующие сообщения:
- 1) У+Ф, 2)УТ, 3) $\overline{Ф}\ \overline{P}$,4) $\overline{ФP}$ 5)УТ(Ф+Р), 6)УТФ $\overline{P}$,7)УТФР

История о находчивом майоре

- Зашифруйте следующие донесения
- а) взят только один из четырех, $$P\bar{T}\bar{У}\bar{\Phi}+\bar{P}T\bar{У}\bar{\Phi}+\bar{P}\bar{T}У\bar{\Phi}+\bar{P}\bar{T}\bar{У}\Phi$$
- б) взят по крайней мере один, $$\overline{\bar{P}\bar{T}\bar{У}\bar{\Phi}}=P+T+У+\Phi$$
- в) взяли не менее двух, $$PT+PУ+P\Phi+TУ+T\Phi+У\Phi$$
- г) взяли только двоих, $$PT\bar{У}\bar{\Phi}+P\bar{T}У\bar{\Phi}+P\bar{T}\bar{У}\Phi+\bar{P}TУ\bar{\Phi}+\bar{P}T\bar{У}\Phi+\bar{P}\bar{T}У\Phi$$
- д) взяли только троих, $$PTУ\bar{\Phi}+PT\bar{У}\Phi+P\bar{T}У\Phi+\bar{P}TУ\Phi$$
- е) ни один не обнаружен. $$\bar{P}\bar{T}\bar{У}\bar{\Phi}$$

История одной сессии

- В сессию студент должен был сдать два экзамена и один зачет. Событие А состоит в том, что студент сдал экзамен по английскому языку, событие В – он сдал экзамен по философии, С – получил зачет по математике. Р(А)=0,5; Р(В)=0,4; Р(С)=0,7.
- Найти вероятность того, что
- 1) студент не получил зачета;
- 2) сдал два экзамена;
- 3) сдал по крайней мере один экзамен;
- 4) получил зачет, но не сдал
- ни одного экзамена;
- 5) сдал только один экзамен
- и не получил зачета;
- 6) не сдал ничего;
- 7) сдал все

$$1 - P(C) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$$

$$P(AB) = P(A)\cdot P(B) = 0{,}5\cdot 0{,}4 = 0{,}2$$

$$1 - P(\overline{A}\,\overline{B}) = 1 - 0{,}5\cdot 0{,}6 = 0{,}7$$

$$P(\overline{A}\,\overline{B}C) = 0{,}5\cdot 0{,}6\cdot 0{,}7 = 0{,}21$$

$$P((A\overline{B} + \overline{A}B)\overline{C}) = (0{,}5\cdot 0{,}6 + 0{,}5\cdot 0{,}4)\cdot 0{,}3 = 0{,}15$$

$$P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}) = 0{,}5\cdot 0{,}6\cdot 0{,}3 = 0{,}09$$

$$P(ABC) = 0{,}5\cdot 0{,}4\cdot 0{,}7 = 0{,}14$$

Задача

- **1.Вероятность попадания в мишень для первого стрелка 0,8, а для второго – 0,6. Стрелки независимо друг от друга сделают по одному выстрелу. Какова вероятность того, что в мишень попадет хотя бы один из стрелков?**
- Решение:
- <u>Авторское решение</u>
- A – попадание первого стрелка,
- B – попадание второго стрелка,
- C – попадание хотя бы одного из стрелков.
- Тогда, очевидно C = A + B, причем события A и B совместны. Следовательно,
- p(C) = p(A) + p(B) – p(AB).
- Так как события A и B независимы, то
- p(C) = p(A) + p(B) – p(A) p(B)= 0,8 + 0,6 – 0,8 · 0,6 = 0,92.
- <u>Другое решение</u>
- <u>p(C)=1-p($\overline{A}\,\overline{B}$)=1-0,2*0,4=1-0,08=0,92</u>

Задача

- **2. В команде из 12 спортсменов 5 мастеров спорта. По жеребьевке из команды выбирают 3 спортсменов. Какова вероятность того, что все выбранные спортсмены являются мастерами спорта?**

- Решение
- 1) $p(A) = \frac{C_5^3}{C_{12}^3} = \frac{1}{22}$

- 2) p(A) = p(A1) p(A2/A1)*
  *p(A3/A1A2) =

$$= \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{3}{10} = \frac{1}{22}$$

Задача

- 3. Монета брошена три раза. Найдите вероятность того, что герб выпадет ровно два раза.
- Решение:
- A_i – выпадение герба при i-м бросании монеты (i = 1, 2, 3), A – выпадение 2 гербов при 3 бросаниях монеты.
- $A = A_1 A_2 \overline{A_3} + A_1 \overline{A_2} A_3 + \overline{A_1} A_2 A_3.$
- $p(A) = p(A_1)\, p(A_2)\, p(\overline{A_3}) + p(A_1)\, p(\overline{A_2})\, p(A_3) +$
- $+\, p(\overline{A_1})\, p(A_2)\, p(A_3) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$

Задача

- **4** В урне n белых и n черных шаров. Все шары из урны извлекаются парами, причем вынутые шары обратно не возвращаются. Какова вероятность того, что все пары будут состоять из разноцветных шаров?
- **Решение:**
- Пусть A_k (k=1,2,...,n) обозначает, что k-я пара состоит из разноцветных шаров. Тогда вероятность события
- $A = A_1 A_2 \dots A_n$ равна
- $p(A) = p(A_1)\, p(A_2/A_1) \dots p(A_n/A_1 A_2 \dots A_{n-1}) =$
- $$= \frac{n^2}{C_{2n}^2} \cdot \frac{(n-1)^2}{C_{2n-2}^2} \cdot \frac{(n-2)^2}{C_{2n-4}^2} \cdot \ldots \cdot \frac{4}{C_4^2} \cdot \frac{1}{C_2^2} = \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!}$$