

ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ В БЕСКОНЕЧНОСТИ И В ТОЧКЕ

Понятие предела функции $y=f(x)$ связано с понятием предела числовой последовательности

$$a_n = f(n)$$

У числовой последовательности переменная n , возрастая, принимает только целые значения, а у функции переменная x может принимать любые значения.

Число A называется пределом функции $y=f(x)$, при x стремящемся к бесконечности, если для любого, сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$, найдется такое положительное число S , что при всех $|x| > S$, выполняется неравенство:

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$$

смысл определения:

При достаточно больших по модулю значениях x , значения функции $f(x)$ очень мало отличаются от числа A (меньше, чем на число ε , каким бы малым оно не было).

Рассмотрим геометрический смысл этого определения.

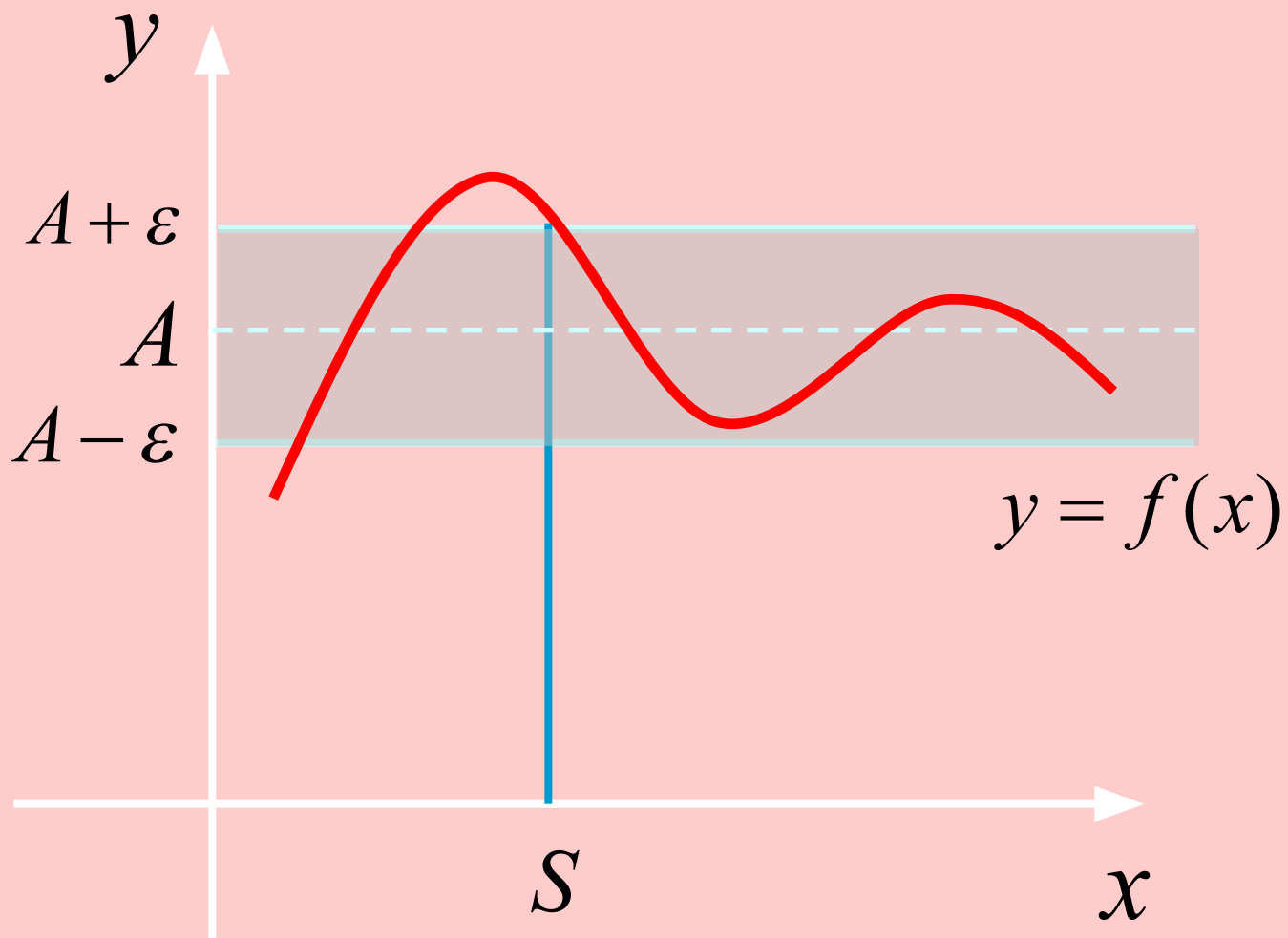
Неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

равносильно двойному неравенству

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$$

что соответствует расположению части графика $y=f(x)$ в полосе шириной 2ε .



Т.е. число A есть предел функции

$$y = f(x)$$

**если для любого, сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$,
найдется такое число S , что при всех**

$$|x| < S$$

**соответствующие ординаты графика функции
 $y=f(x)$ будут заключены в полосе**

$$A - \varepsilon < y < A + \varepsilon$$


какой бы узкой она не была.

Пример.

Доказать, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x + 1}{x} = 5$$

Решение.

Для любого $\varepsilon > 0$ $\left| \left(\frac{5x+1}{x} \right) - 5 \right| < \varepsilon$ 

$\left| 5 + \frac{1}{x} - 5 \right| < \varepsilon$  $\left| \frac{1}{x} \right| < \varepsilon$  $|x| > \frac{1}{\varepsilon}$

Т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует число $S = \frac{1}{\varepsilon} > 0$

Такое, что для всех x , таких что $|x| > S$,
выполняется неравенство:

$|f(x) - 5| < \varepsilon$  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x+1}{x} = 5$

Замечание 1.

Рассмотренное определение предела при x стремящемся к бесконечности предполагает неограниченное возрастание x по абсолютной величине.

Можно сформулировать понятие предела при стремлении x к бесконечности любого знака, т. е. при

$$x \rightarrow +\infty$$

$$x \rightarrow -\infty$$

В случае, когда $x \rightarrow +\infty$ неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

должно выполняться при всех x таких, что $x > s$.

В случае, когда $x \rightarrow -\infty$ неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

должно выполняться при всех x таких, что $x < -s$.

Перейдем к понятию предела функции в точке.
Рассмотрим некоторую функцию $y=f(x)$. Пусть эта функция задана в некоторой окрестности точки x_0 , кроме, может быть, самой этой точки.

Число A называется пределом функции $y=f(x)$, при $x \rightarrow x_0$, (или в точке x_0) если для любого, сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$, найдется такое положительное число δ , что при всех $|x-x_0| < \delta$, выполняется неравенство:

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

смысл определения:

При всех значениях x , достаточно близких к x_0 , значения функции $y=f(x)$ очень мало отличаются по абсолютной величине от числа A (меньше, чем на число ε , каким бы малым оно не было).

Неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$
равносильно двойному неравенству

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$$

Аналогично неравенство $|x - x_0| < \delta$

равносильно неравенству $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$

Это соответствует расположению части графика

$$y = f(x)$$

в полосе шириной 2ε и попаданию точки x в δ -окрестность точки x_0 .

Т.е. число A есть предел функции $y = f(x)$

при $x \rightarrow x_0$, если для любого, сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$

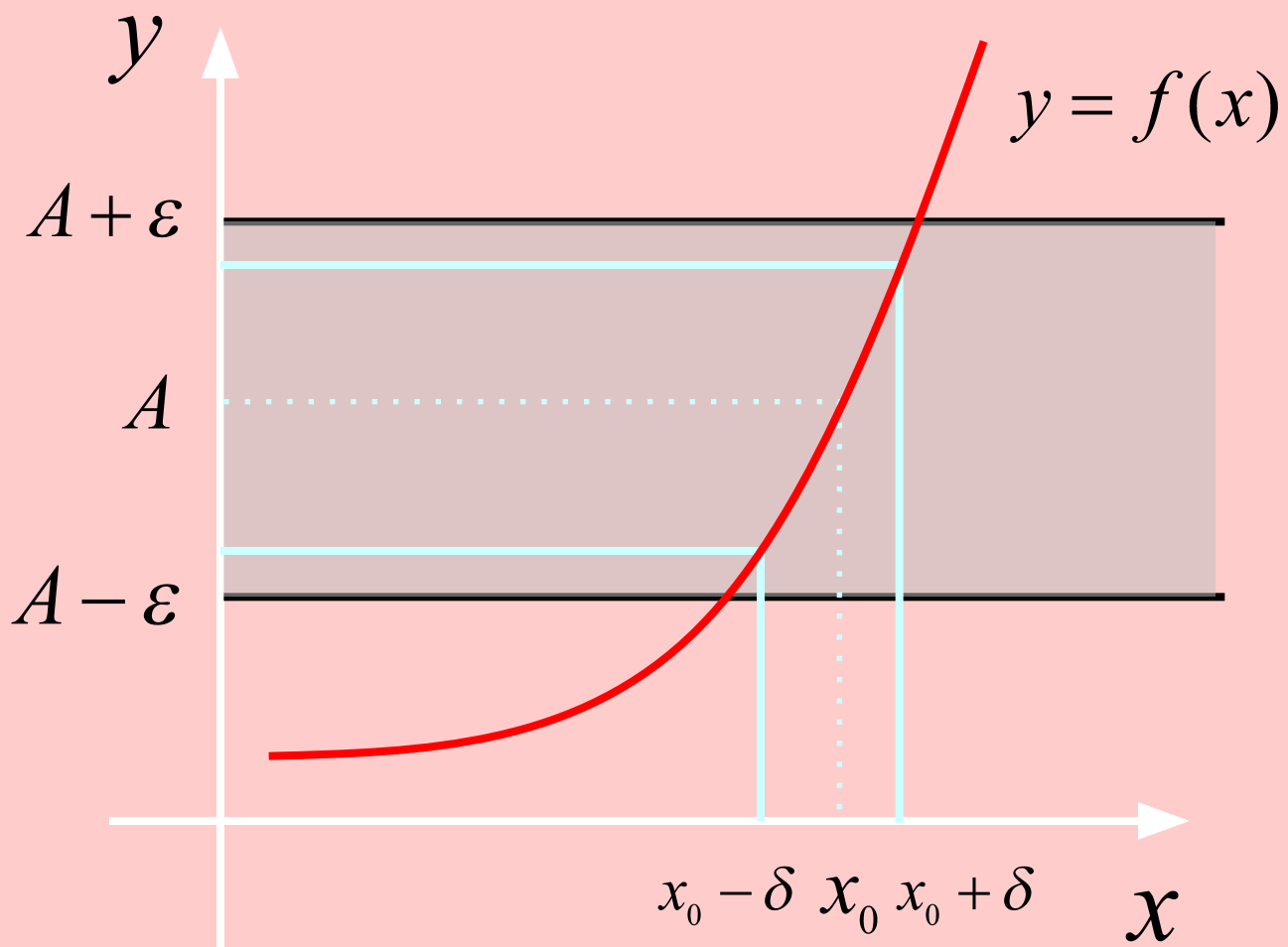
найдется такая δ -окрестность точки x_0 , что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности соответствующие ординаты графика функции

$$y = f(x)$$

будут заключены в полосе

$$A - \varepsilon < y < A + \varepsilon$$

какой бы узкой она не была.



Пример.

Доказать, что

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2x + 3) = 5$$

Решение.

Пусть $\varepsilon=0.1$

Тогда неравенство

$$|2x + 3 - 5| < 0.1$$

будет выполняться при

$$|x - 1| < 0.05$$

Аналогично, при $\varepsilon=0.01$

Неравенство будет выполняться при

$$|x - 1| < 0.005$$

Т.е. для любого $\varepsilon > 0$ неравенство $|2x + 3 - 5| < \varepsilon$

выполняется при

$$|x - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \frac{\varepsilon}{2} > 0$

что для всех x , таких что $|x - 1| < \delta$, выполняется
неравенство:

$$|f(x) - 5| < \varepsilon$$



$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (2x + 3) = 5$$

Замечание 2.

Определение предела не требует существования функции в самой точке x_0 , т. к. рассматриваются значения функции в некоторой окрестности точки x_0 .

Т.е. рассматривая предел $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

мы предполагаем, что $x \rightarrow x_0$

но не достигает значения x_0 .

Замечание 3.

Если при $x \rightarrow x_0$

переменная x принимает значения только меньше x_0 или, наоборот, больше x_0 , и при этом функция $f(x)$ стремится к некоторому числу A , то говорят об односторонних пределах соответственно справа и слева:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A \quad \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A$$

Определение этих пределов будет аналогично рассмотренному выше при $x \rightarrow x_0$

Вместо значений x , удовлетворяющих условию

$$|x - x_0| < \delta$$

рассматриваются такие x , что $x_0 - \delta < x < x_0$

при $x \rightarrow x_0 - 0$

и значения x , такие что $x_0 < x < x_0 + \delta$

при $x \rightarrow x_0 + 0$

Если пределы функции $f(x)$ слева и справа одинаковы и равны A , то существует общий предел этой функции, также равный A :

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A$$



$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$