9.3. ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ

Точка x_0 называется точкой <u>максимума</u> функции $f(x)$, если в некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство

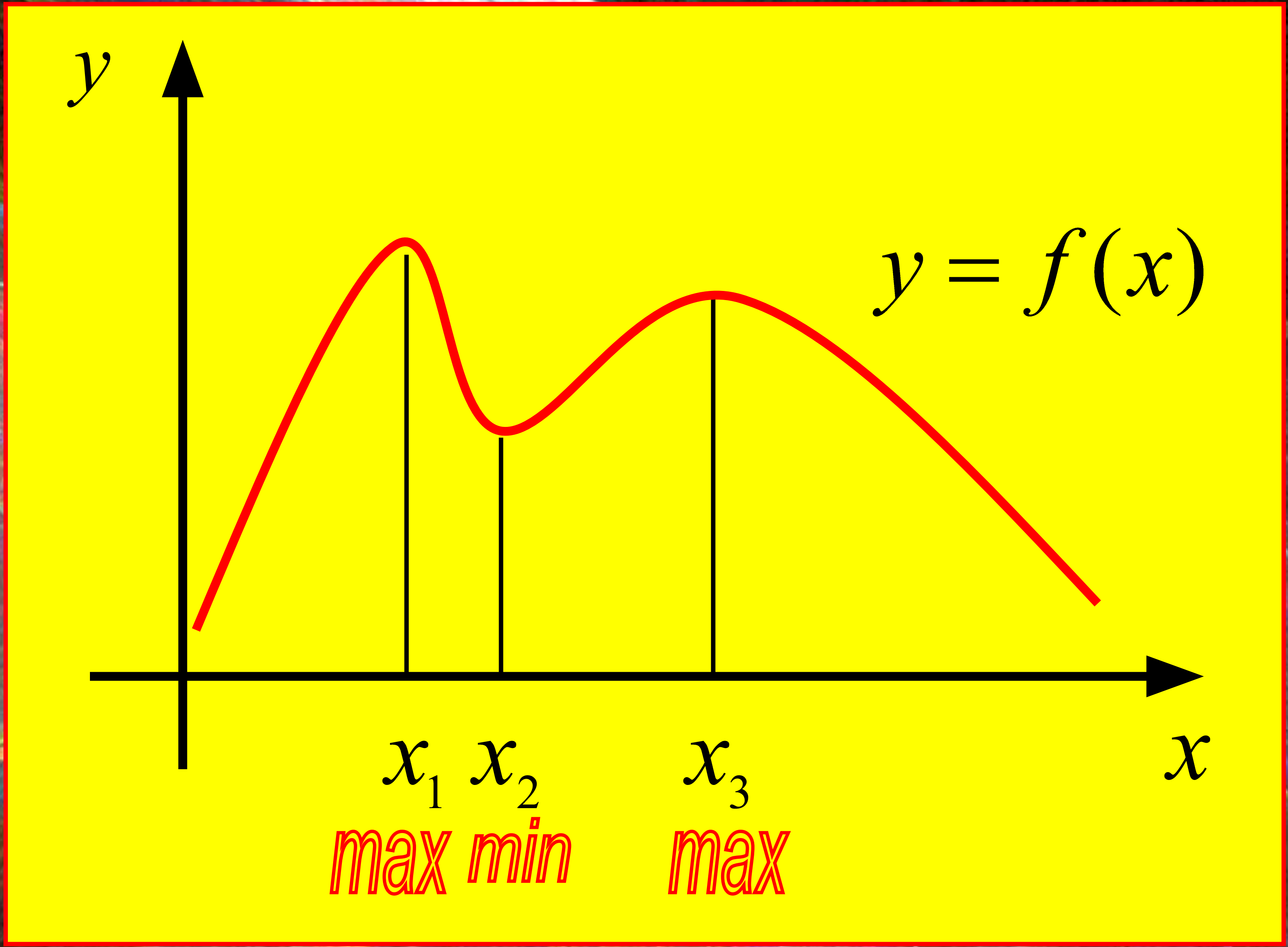
$$\boxed{f(x) \le f(x_0)}$$

Точка x_1 называется точкой <u>минимума</u> функции $f(x)$, если в некоторой окрестности точки x_1 выполняется неравенство

$$\boxed{f(x) \geq f(x_1)}$$

Значения функции в точках x_0 и x_1 называются соответственно <u>максимумом</u> и <u>минимумом</u> функции.

Максимум и минимум функции называется <u>экстремумом</u> функции.



y
y = f(x)
x
x1 x2 x3
max min max

На одном промежутке функция может иметь несколько экстремумов, причем может быть, что минимум в одной точке больше максимума в другой.

Максимум или минимум функции на некотором промежутке не являются в общем случае наибольшим и наименьшим значением функции.

Если в некоторой точке x_0 дифференцируемая функция $f(x)$ имеет экстремум, то в некоторой окрестности этой точки выполняется теорема Ферма и производная функции в этой точке равна нулю:

$$f'(x_0) = 0$$

Однако, функция может иметь экстремум в точке, в которой она не дифференцируема.

Например, функция

$$y = |x|$$

имеет минимум в точке

$$x = 0$$

но она в этой точке не дифференцируема.

необходимое условие экстремума:

Для того, чтобы функция y=f(x) имела экстремум в точке x_0, необходимо, чтобы ее производная в этой точке равнялась нулю или не существовала.

Точки, в которых выполняется необходимое условие экстремума, называются <u>критическими</u> или <u>стационарными</u>.

Т.об., если в какой-либо точке имеется экстремум, то эта точка является критической.

Но критическая точка не обязательно является точкой экстремума.

Примеры

Найти критические точки и экстремумы функций:

1

$$y = x^2$$

Решение:

Применим необходимое условие экстремума:

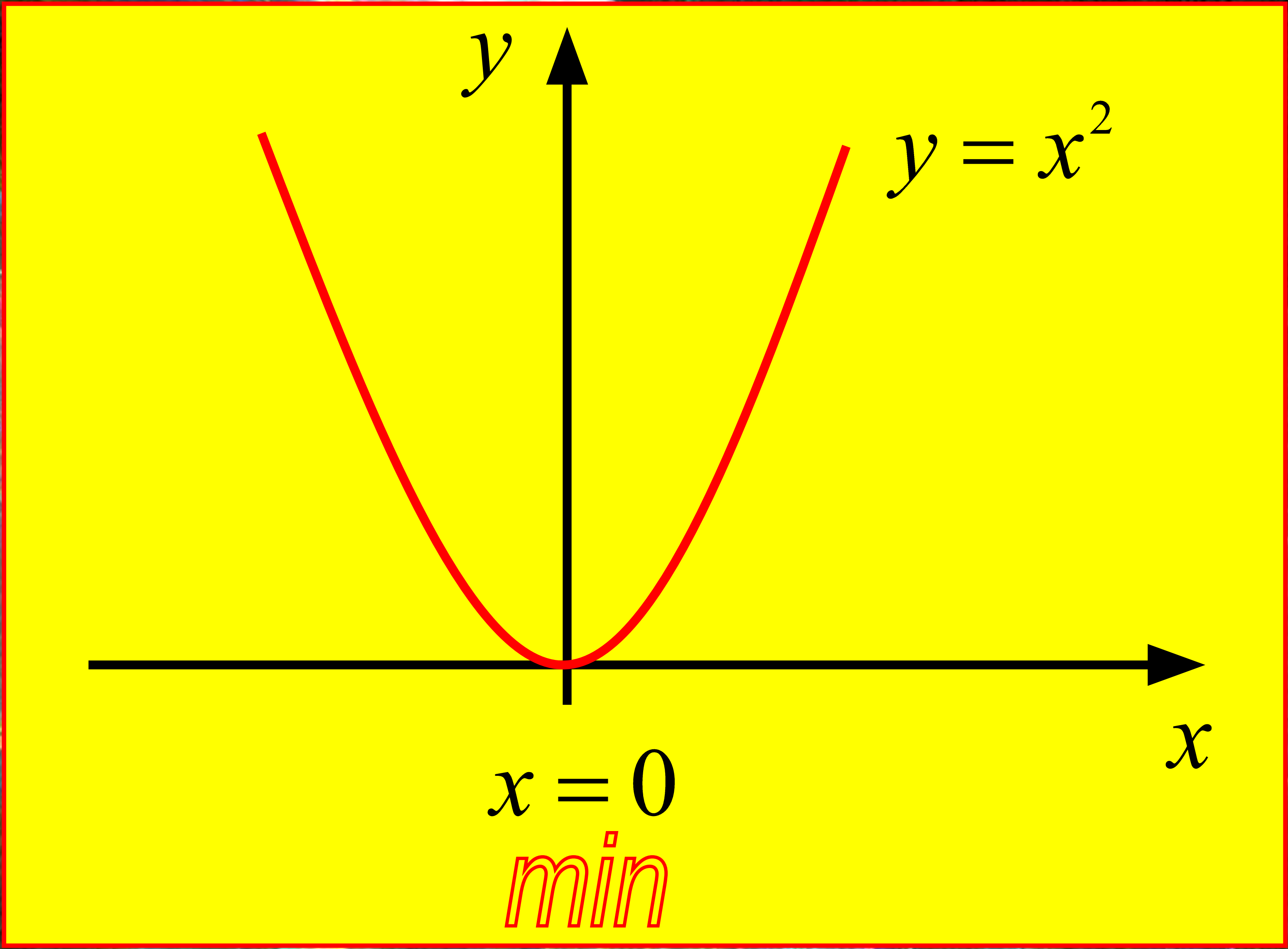
$$y' = (x^2)' = 2x$$

$$y' = 2x = 0 \quad при \quad x = 0$$

$$x = 0$$

$$y = 0$$

- критическая точка


y
$y = x^2$
x
$x = 0$
min

2

$$y = x^3 + 1$$

Решение:

Применим необходимое условие экстремума:

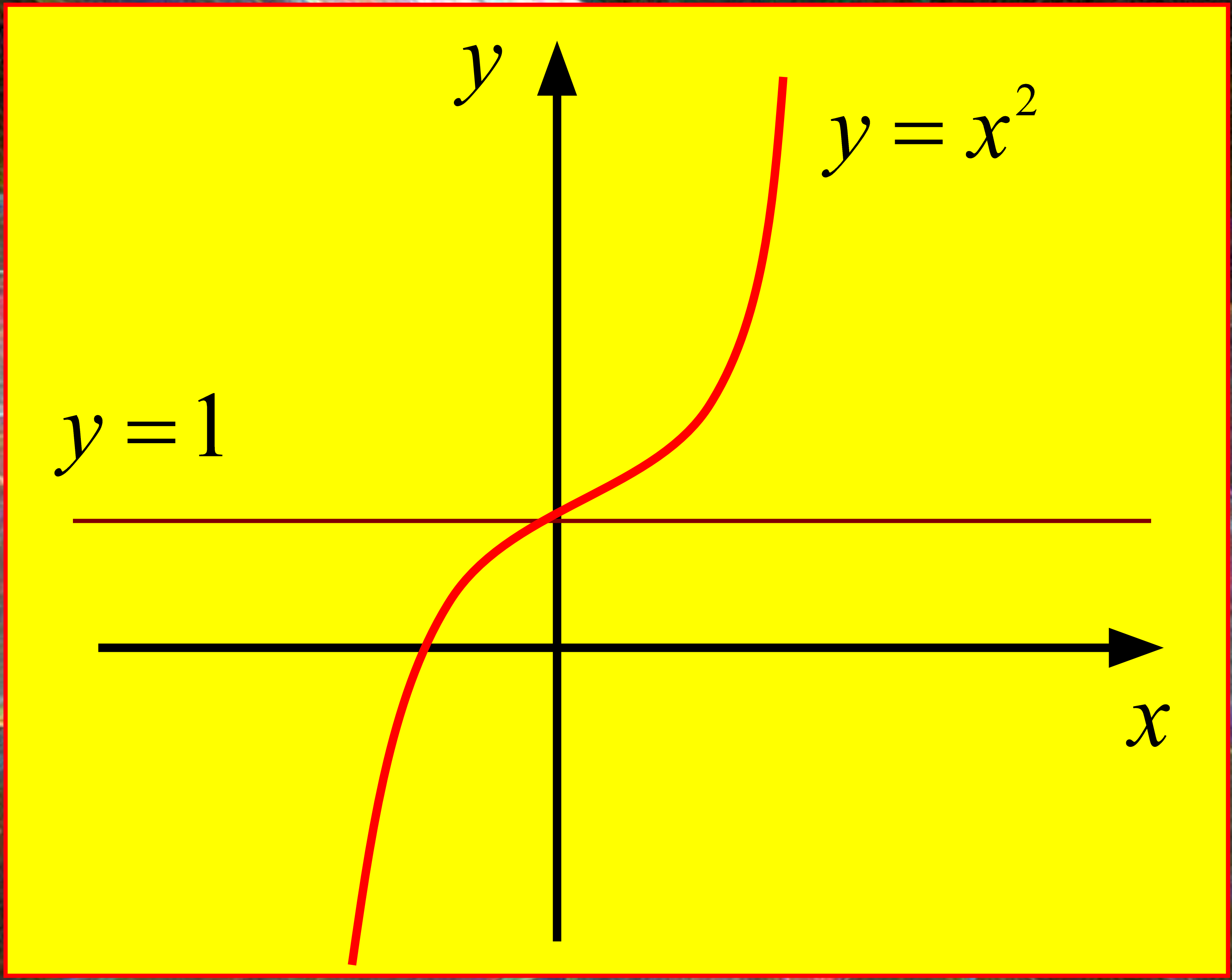
$$y' = (x^3 + 1)' = 3x^2$$

$$y' = 3x^2 = 0 \quad при \quad x = 0$$

$$x = 0$$

- критическая точка

$$y = 1$$



y
$y = x^2$
$y = 1$
x

первое достаточное условие экстремума

Если при переходе через точку x_0 производная дифференцируемой функции $y=f(x)$ меняет знак с плюса на минус, то x_0 есть точка максимума, а если с минуса на плюс, то x_0 есть точка минимума.

Доказательство:

Пусть производная меняет знак с плюса на минус, т.е. на некотором интервале

$$\left(a; x_0\right) \qquad f'(x) > 0$$

а на некотором интервале

$$\left(x_0; b\right) \qquad f'(x) < 0$$

Тогда функция *y=f(x)* будет возрастать на $\left(a; x_0\right)$

и будет убывать на $(x_0;b)$

По определению возрастающей функции

$$f(x_0) > f(x) \quad \text{для всех} \quad x \in (a;x_0)$$

Для убывающей функции

$$f(x_0) < f(x) \quad \text{для всех} \quad x \in (x_0;b)$$

$\Rightarrow$ x_0 -точка максимума.

Аналогично доказывается для минимума.

схема исследования функции на экстремум

1

Найти производную функции

$$y' = f'(x)$$

2

Найти критические точки функции, в которых производная равна нулю или не существует.

3

Исследовать знак производной слева и справа от каждой критической точки.

4

Найти экстремум функции.

Пример

Исследовать функцию на экстремум:

$$y = x(x-1)^3$$

Решение:

Применим схему исследования функции на экстремум:

1 Находим производную функции:

$$y' = (x(x-1)^3)' = (x-1)^3 + 3x \cdot (x-1)^2 =$$

$$= (x-1)^2(x-1+3x) = (x-1)^2(4x-1)$$

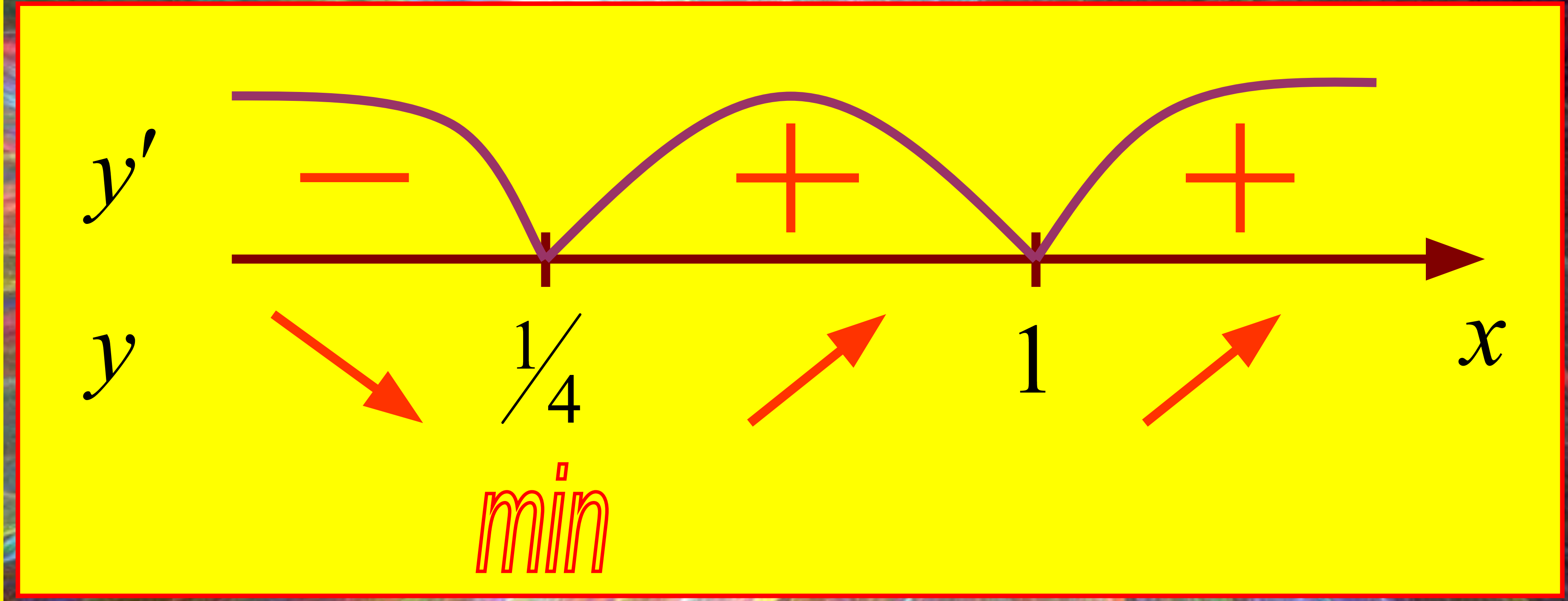
2

Находим критические точки:

$$(x-1)^2(4x-1)=0$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1=1 \\ x_2=\dfrac{1}{4} \end{array}\right\}\text{критические точки}$$

3 Исследуем знак производной слева и справа от каждой критической точки:



В точке *x=1* экстремума нет.

4

Находим экстремум функции:

$$f_{\min}\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{27}{256}$$

второе достаточное условие экстремума:

Если первая производная дифференцируемой функции $y=f(x)$ в точке x_0 равна нулю, а вторая производная в этой точке положительна, то x_0 есть точка минимума, а если вторая производная отрицательна, то x_0 есть точка максимума.

Доказательство:

Пусть

$$f'(x_0) = 0$$

$$f''(x_0) > 0$$

следовательно

$$f''(x) = \left(f'(x)\right)' > 0$$

и в некоторой окрестности точки x_0, т.е.

функция $f'(x)$ будет возрастать на $(a;b)$

содержащем точку x_0.

Но $f'(x_0)=0$ $\Rightarrow$

на интервале $(a;x_0)$ $f'(x)>0$

а на интервале $(x_0;b)$ $f'(x)<0$

Таким образом, функция $f'(x)$

при переходе через точку x_0 меняет знак с минуса на плюс, следовательно эта точка является точкой минимума.

Аналогично доказывается случай для максимума функции.

Схема исследования функции на экстремум в этом случае аналогична предыдущей, но третий пункт следует заменить на:

3

Найти вторую производную и определить ее знак в каждой критической точке.

Из второго достаточного условия следует, что если в критической точке вторая производная функции не равна нулю, то эта точка является точкой экстремума.

Обратное утверждение не верно: если в критической точке вторая производная функции равна нулю, то эта точка также может являться точкой экстремума.

В этом случае для исследования функции необходимо использовать первое достаточное условие экстремума.