6. ПРЕДЕЛЫ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ

6.1. ПРЕДЕЛ ЧИСЛОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Если каждому натуральному числу n по некоторому закону поставлено в соответствие определенное число a_n, то говорят, что задана числовая последовательность

$$\{a_n\} = a_1, a_2 \ldots a_n$$

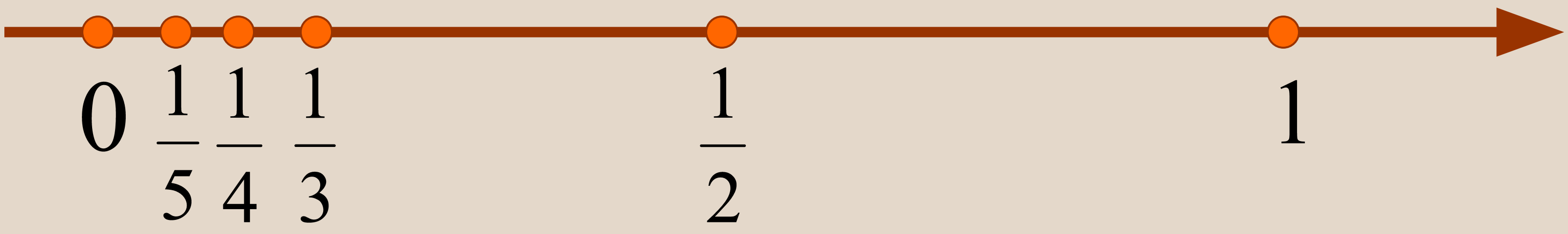
Числа $a_1, a_2 \ldots a_n$ называются членами последовательности, а число a_n называется общим членом или n-ым членом данной последовательности.

Например:

1 $$2, 4, 6, 8 \ldots 2n \ldots$$

2 $$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \ldots \frac{1}{n} \ldots$$

Изобразим члены последовательности (2) точками на числовой оси.



Можно заметить, что члены последовательности с ростом *n* сколько угодно близко приближаются к нулю.

Последовательность $\{a_n\}$ называется ограниченной сверху (снизу), если существует такое число М (m), что любой элемент этой последовательности удовлетворяет неравенству:

$$a_n \le M$$

$$a_n \ge m$$

Последовательность $\{a_n\}$ называется ограниченной, если она ограничена сверху и снизу:

$$m \le a_n \le M$$

Последовательность (1) ограничена снизу, но не сверху.

Последовательность (2) ограничена, т.к. все ее элементы находятся внутри промежутка [0,1].

Если выполняется условие $\boxed{a_n \le a_{n+1}}$

то последовательность называется <u>возрастающей.</u>

Если выполняется условие $\boxed{a_n \ge a_{n+1}}$

то последовательность называется <u>убывающей.</u>

Последовательность (1) возрастающая.

Последовательность (2) убывающая.

Число А называется пределом числовой последовательности $\{a_n\}$, если для любого, сколь угодно малого числа ε>0, найдется такой номер N, что при всех n>N, выполняется неравенство:

$$\left|a_n - A\right| < \varepsilon$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A$$

Последовательность, имеющая предел, называется сходящейся.

В противном случае последовательность расходящаяся.

Смысл определения предела числовой последовательности:
Для достаточно больших номеров n члены последовательности очень мало отличаются от числа A (меньше, чем на число , ε , каким бы малым оно не было).

ПРИМЕР.

Дана последовательность

3

$$0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{4}{5}, \ldots \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) \ldots$$

Показать, что предел этой последовательности равен 1.

РЕШЕНИЕ:

Пусть *ε=0.1*

Тогда неравенство $\left|a_n - A\right| < \varepsilon$

примет вид:

$$\left|\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)-1\right|<0.1$$

$$\frac{1}{n}<0.1 \Rightarrow n>10$$

Если *ε=0.01*, то неравенство выполняется при

$$n > 100$$

Для любого *ε* >0, неравенство выполняется при

$$n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Т.е. для любого *ε* >0 существует номер $n = \frac{1}{\varepsilon}$

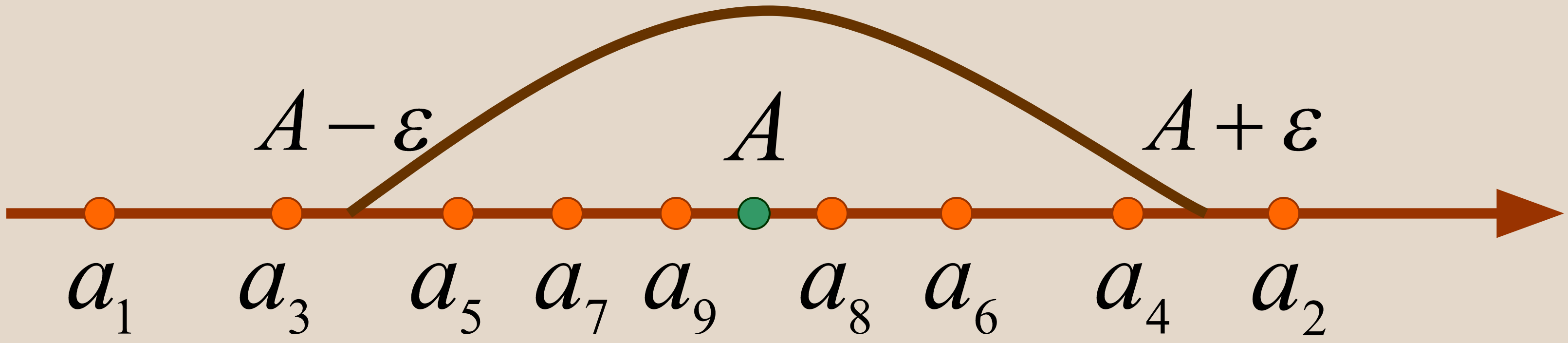
Что для всех *n>N*, выполняется неравенство:

$$|a_n - 1| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \to \infty} a_n = 1$$

Рассмотрим геометрический смысл предела числовой последовательности. Для этого изобразим члены последовательности (3) точками на числовой оси.

$$a_1 = 0,\; a_2 = \frac{3}{2},\; a_3 = \frac{2}{3},\; a_4 = \frac{5}{4},\; a_5 = \frac{4}{5}$$

$$a_6 = \frac{7}{6},\; a_7 = \frac{6}{7},\; a_8 = \frac{9}{8},\; a_9 = \frac{8}{9},\ldots$$



Неравенство $\left|a_n - A\right| < \varepsilon$

равносильно двойному неравенству

$$A-\varepsilon < a_n < A+\varepsilon$$

которое соответствует попаданию членов последовательности в ε **– окрестность точки** A**.**

Т.е. число A есть предел числовой последовательности $\{a_n\}$, если для любого, сколь угодно малого числа $\varepsilon>0$, найдется такой номер N, начиная с которого все члены последовательности будут заключены в ε – окрестности точки A, какой бы узкой она не была.

Вне этой окрестности может быть только конечное число членов последовательности.