13. ДИСПЕРСИЯ И ЕЕ СВОЙСТВА

***Дисперсия* - это мера рассеяния значений случайной величины около ее математического ожидания:**

$$D[X] = M[(X - m_x)^2]$$

Например, пусть случайная величина *X* задана рядом распределения:

x	*0*	*1*
p	*q*	*p*

Найдем математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

$$M[X] = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p = m_x$$

$$D[X] = (0 - m_x)^2 \cdot q + (1 - m_x)^2 \cdot p =$$

$$= (0 - p)^2 \cdot q + (1 - p)^2 \cdot pp^2 \cdot q + q^2 \cdot p =$$

$$= p \cdot (1 - p) = pq$$

Для вычисления дисперсии часто используют другую формулу:

$$D[X] = M[X^2] - m_x^2$$

Доказательство:

$$D[X] = M[(X - m_x)^2] = M[X^2 - 2m_x X + m_x{}^2] =$$

Используем свойства математического ожидания:

$$= M[X^2] - M[2m_x X] + M[m_x{}^2] =$$

$$= M[X^2] - 2m_x \cdot M[X] + m_x{}^2 =$$

$$= M[X^2] - 2m_x{}^2 + m_x{}^2 = M[X^2] - m_x{}^2$$

СВОЙСТВА ДИСПЕРСИИ

1

Дисперсия от постоянной величины равна нулю:

$$D[C]=0, \quad C=const$$

Доказательство:

Используем второе выражение для дисперсии. Так как

$$M[C]=C, \quad M[C^2]=C^2$$

то

$$D[C]=M[C^2]-(M[C])^2=C^2-C^2=0$$

2

Дисперсия суммы случайной величины Х и постоянной величины С равна дисперсии величины Х :

$$D[X+C]=D[X]$$

Доказательство:

По свойству математического ожидания:

M[X+C]=M[X]+C

Поэтому на основании определения дисперсии:

$$D[X+C]=M\left[\left(\left(X+C\right)-M\left[X+C\right]\right)^2\right]=$$
$$=M\left[\left(X+C-m_x-C\right)^2\right]=M\left[\left(X-m_x\right)^2\right]=D[X]$$

3

Постоянная величина выносится за знак дисперсии в квадрате:

$$D[kX]=k^2 D[X]$$

Доказательство:

Используем определение дисперсии:

$$D[k\cdot X] = M\left[\left(\left(k\cdot X\right) - M\left[k\cdot X\right]\right)^2\right] =$$

По свойству математического ожидания:

$$= k^2\cdot M\left[X^2\right] - k^2\cdot M^2\left[X\right] =$$

$$= k^2\cdot\left(M\left[X^2\right] - M^2\left[X\right]\right) = k^2\cdot D\left[X\right]$$

4

Дисперсия всегда неотрицательна:

$$D[X] \geq 0$$

5

Дисперсия суммы двух случайных величин находится по формуле:

$$D[X+Y]=D[X]+D[Y]+2K_{XY}$$

Величина K_{XY} называется корреляционным моментом случайных величин X и Y:

$$K_{XY} = M\left[\left(X - m_x\right)\left(Y - m_y\right)\right]$$

Доказательство:

Распишем дисперсию суммы случайных величин по определению дисперсии:

$$D[X+Y]=M\left[\left(\left(X+Y\right)-M\left(X+Y\right)\right)^2\right]=$$

Математическое ожидание суммы равно сумме математических ожиданий:

$$=M\left[\left(\left(X+Y\right)-\left(m_x+m_y\right)\right)^2\right]=$$

Перегруппируем слагаемые:

$$= M\left[\left((X - m_x) + (Y - m_y)\right)^2\right] =$$

Под знаком математического ожидания раскрываем квадрат суммы:

$$= M\left[(X - m_x)^2 + 2(X - m_x)(Y - m_y) + (Y - m_y)^2\right] =$$

Снова используем свойства математического ожидания:

$$= M[(X - m_x)^2] + 2M[(X - m_x)(Y - m_y)] +$$

$$+ M[(Y - m_y)^2] = D[X] + D[Y] + 2K_{XY}$$

Корреляционный момент описывает взаимодействие двух случайных величин.

Если случайные величины X и Y независимы, то их корреляционный момент равен 0.

Квадратный корень из дисперсии называется <u>средним квадратичным отклонением</u>:

$$\sigma[X] = \sqrt{D[X]} = \sigma_x$$

Дисперсия имеет размерность квадрата случайной величины, а среднее квадратичное отклонение имеет размерность самой случайной величины.