ПОГРЕШНОСТИ И ПРИБЛИЖЕННЫЕ ЧИСЛА

Кафедра Информационных технологий и управляющих систем

Предмет «Вычислительные методы и их применение в ЭВМ»

Лекция

Доцент Стрельцова Г. А.

Введение

При выполнении массовых вычислений важно придерживаться определенных простых правил, выработанных практикой, которые позволяют экономить труд вычислителя и рационально использовать вычислительную технику. Одно из таких правил – разработка подробной вычислительной схемы.

Повестка дня

- Список изучаемых разделов:
- **Приближенные числа и правила приближений.**
- **Погрешности арифметических операций.**
- **Основные свойства решений.**

- Время, отводимое на каждый раздел: 5-10 минут.

Обзор

Разделы лекции

Приближенные числа и правила приближений

Погрешности арифметических операций

Основные свойства решений

Словарь терминов

Приближенным числом a^* называется число, отличающееся от точного a и заменяющее последнее в вычислениях. Если известно, что $a^* < a$, то a^* называют приближенным значением числа a по недостатку; если же $a^* > a$, то - по избытку.

Приближенные числа и правила приближений

Значащими цифрами числа a^* называются все цифры его записи, начиная с первой ненулевой слева.

Значащую цифру числа a^* называют **верной**, если абсолютная погрешность числа не превышает единицу разряда, соответствующего этой цифре.

Пример: **$\Delta(a^*) = 0,000002$, $a^* = 0,0\underline{1030}00$ – 4 верных цифры.**

Приближенные числа и правила приближений

Округление числа – замена его другим числом с меньшим числом значащих цифр.

Погрешность такой замены называется погрешностью округления.

Виды округления:

- **Усечение** – отбрасывание всех цифр, расположенных слева от значащей цифры. Абсолютная погрешность не превышает единицы разряда.
- **Округление по дополнению** – при разряде, меньшим 5, остается та же цифра, при большем или равном 5 добавляется 1. Абсолютная погрешность не превышает ½ разряда последней оставляемой цифре.

Границы погрешностей всегда округляют в сторону увеличения.

Приближенные числа и правила приближений

Относительная погрешность (%) чисел с n верными знаками.

Начало таблицы.

Первые значащие цифры	n=2	n-=3	n=4
10-11	10	1	0,1
12-13	8,3	0,83	0,083
14,…,16	7,1	0,71	0,071
17,…,19	5,9	0,59	0,059
20,…,22	5	0,5	0,05
23,…,26	4,3	0,43	0,043
26,…,29	3,8	0,38	0,038
30,…,34	3,3	0,33	0,033

Приближенные числа и правила приближений

Относительная погрешность (%) чисел с n верными знаками.

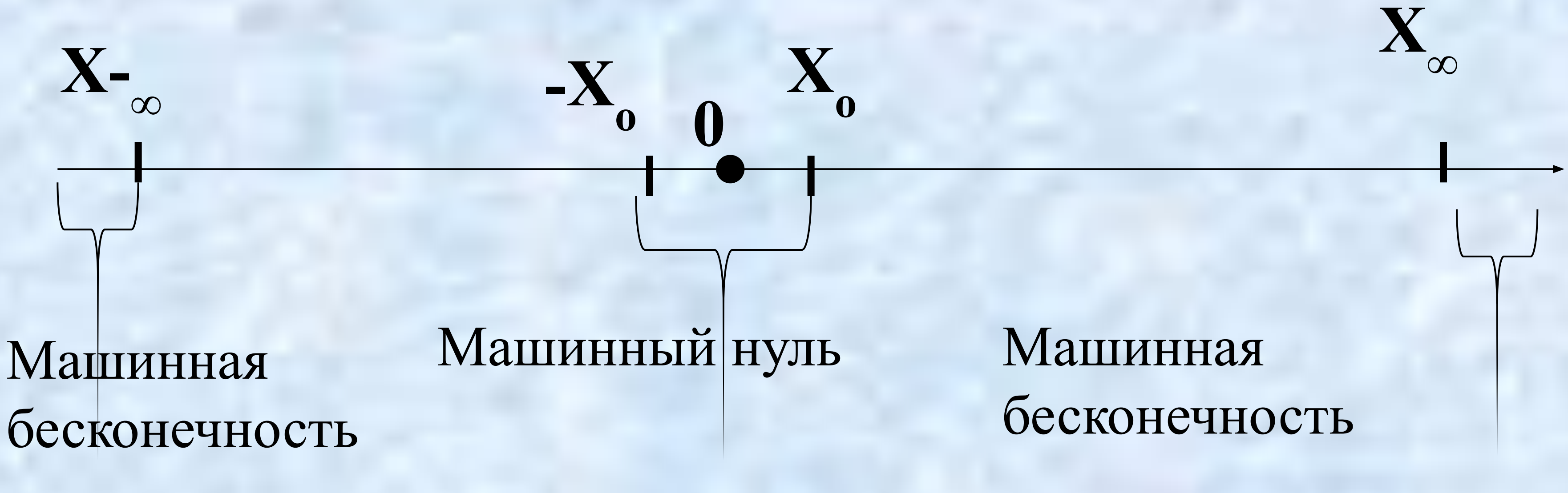
Окончание таблицы.

Первые значащие цифры	n=2	n-=3	n=4
35,…,39	2,9	0,29	0,029
40,…,44	2,5	0,25	0,025
45,…,49	2,2	0,22	0,022
50,…,59	2	0,2	0,02
60,…,69	1,7	0,17	0,017
70,…,79	1,4	0,14	0,014
80,…,89	1,2	0,12	0,012
90,…,99	1,1	0,11	0,011
Пример: 0,00354	35,…,39	3	δ= 0,29%

Приближенные числа и правила приближений

Для двоичных чисел существуют понятия:

- Машинный нуль.
- Машинная бесконечность.
- Переполнение.
- Исчезновение порядка.



Приближенные числа и правила приближений

Числа, большие по модулю, чем X∞, рассматриваются, как машинная бесконечность, и попытка получить такое число приводит к аварийному останову по переполнению. Числа, меньшие по модулю, чем Xo представляются машинным нулем. При получении таких чисел возможно исчезновение порядка (или антипереполнение).

Для двоичных чисел при потери точности вычислений используют так называемую удвоенную точность.

Приближенные числа и правила приближений

Пример: Имеется гипотетическая машина с 6 двоичными разрядами мантиссы, в которой округление происходит только по дополнению.

Выполнить арифметические действия для двух чисел в двоичном коде:

a=20.5D=10100.1B; b=1.75D=1.11B

a+b=22.25D; a*b=35,785D

a+b=10100.1+1.11=101101.01B ≈10110.1B =22.5D

a*b=10100.1*1.11=1100011.111B ≈100100.1B =36D

Приближенные числа и правила приближений

Проверка точности вычислений проводится по так называемому машинному эпсилону $\varepsilon_м$. Машинный эпсилон $\varepsilon_м$ – это минимальное из представленных чисел ε, для которых $1 \quad \varepsilon_м > 1 \oplus$

Алгоритм проверки (вставка в фрагмент программы):

1. Задается шаг $\varepsilon^{(o)}=1$, проводится вычисление,
2. Задается шаг $\varepsilon^{(1)}=0.5 \ \varepsilon^{(o)}$ проводится вычисление и проверяется неравенство $\mathbf{1 \oplus \varepsilon > 1}$

……………………………………………………………………………

n. Задается шаг $\varepsilon^{(n)}=0.5 \ \varepsilon^{(n-1)}$ проводится вычисление и проверяется неравенство $\mathbf{1 \oplus > 1}$

Если неравенство выполняется, то принимается $\varepsilon_м = \varepsilon^{(n-1)}$ и переходят к следующему этапу вычислений.

Приближенные числа и правила приближений

В представленном примере $\varepsilon_м$ = 0.000001,

т. к. 1+ $\varepsilon_м$ =1.000001, тогда 1 $\oplus$ $\varepsilon_м$ =1.00001

Если же к 1 добавить любое положительное число $\varepsilon < \varepsilon_м$, то в седьмом разряде результата будет стоять нуль, и после округления получается:

$1 \oplus \varepsilon = 1$

Приближенные числа и правила приближений

В современной мировой практике используется ошибка вычислений приближенного числа:

$$\text{Error} = |a-a^{*}|/(1+a)$$

$\text{Error} \rightarrow \Delta\,(a^{*})$ при $|a| \ll 1$

$\text{Error} \rightarrow \delta(a^{*})$ при $|a| \gg 1$

Погрешности арифметических операций

Погрешности суммы и разности:

$$\Delta (a^* \pm b^*) \le \Delta (a^*) + \Delta (b^*)$$

$$\delta (a^* + b^*) \le \delta_{max} \; ; \; \delta (a^* - b^*) \le v^* \delta_{max}$$

$$\delta_{max} = \max\{\delta (a^*), \delta (b^*) \}, \; v=|a+b|/|a-b|$$

Относительные погрешности произведения и частного: $\Delta (a^* + b^*) \le \Delta (a^*) + \Delta (b^*)$

$$\delta(a^* b^*) \le \delta (a^*) + \delta (b^*) + \delta (a^*) * \delta (b^*)$$

$$\delta(a^* / b^*) \le (\delta (a^*) + \delta (b^*))/(1 - \delta (b^*))$$

Границы относительных погрешностей:

$$\square\delta\square(a^* b^*) \approx \delta\square (a^*) + \delta\square (b^*) \approx \delta\square(a^*/ b^*)$$

Основные свойства решений

Корректность вычислительной задачи.

Это выполнение условий: 1) ее решение y, принадлежащих Y, существует при всех входных x, принадлежащих X. 2) это решение единственное 3) решение устойчиво по отношению к малым возмущениям входных величин.

Единственность вычислительной задачи. Задача должна иметь единственное решение.

Устойчивость вычислительной задачи. Задача устойчива по входным данным, если для любого $\varepsilon>0$ существует

$\delta = \delta(\varepsilon)>0$ такое, что всякому исходному x^* при котором $\Delta(x^*) < \delta$, соответствует y^*, для которого $\Delta(y^*) < \varepsilon$.

Т. е. решение y зависит от входного x непрерывным образом.

Относительная устойчивость решения – замена Δ на δ.

ВЫВОДЫ

Рассмотренные вопросы

- **Приближенные числа и правила приближений.**
- **Погрешности арифметических операций.**
- **Основные свойства решений.**

Практические работы

1. Примеры вычислений.